سامانه بانک تستی

# FlowRax

# ریاضی

# Math

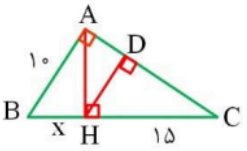
@Flow_KonKour

@LoPRax_KonKour

کلیک کن و با ما همراه شو!

۱

در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$، AH ارتفاع وارد بر وتر است:




$$AB^{۲} = BH \times BC \Rightarrow ۱۰^{۲} = x(x+۱۵) \Rightarrow x^{۲} + ۱۵x - ۱۰۰ = ۰$$
$$\Rightarrow (x+۲۰)(x-۵) = ۰ \Rightarrow x = ۵$$

از طرفی: $DH \parallel AB \Rightarrow \frac{DH}{AB} = \frac{CH}{BC} \Rightarrow \frac{DH}{۱۰} = \frac{۱۵}{۲۰} \Rightarrow DH = ۷/۵$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲

$$AC = ۲(۱۲) = ۲۴$$

دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{AED}$ متشابه هستند:

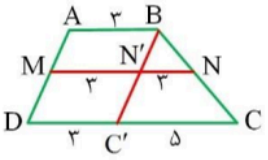
$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ADE} \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD}$$
$$\Rightarrow \frac{۲۴}{۱۲} = \frac{۱۲}{۶} = \frac{y+۱۲}{۹} \Rightarrow x = ۶, y = ۶ \Rightarrow \frac{y}{۶} = ۱$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳

از B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا MN و DC را به ترتیب در $N'$ و $C'$ قطع کند، $ABC'D$ و $ABN'M$ متوازی‌الاضلاع هستند و $DC' = MN' = AB = ۳$، پس $NN' = ۳$ می‌باشد.

در مثلث $\overset{\Delta}{BCC'}$ می‌دانیم $NN' \parallel CC'$، پس طبق قضیه تالس:



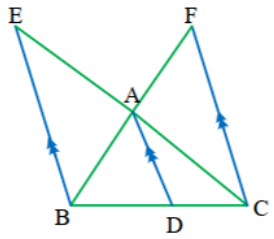

$$\left.\begin{array}{l} \frac{BN}{BC} = \frac{NN'}{CC'} \\ \frac{BN}{NC} = \frac{۳}{۲} \rightarrow \frac{BN}{BC} = \frac{۳}{۵} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۳}{CC'} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow CC' = ۵$$

با توجه به اینکه $DC = DC' + CC'$ و $CC' = ۵$ و $DC' = ۳$، پس: $DC = ۸$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴

با توجه به شکل مقابل، داریم:

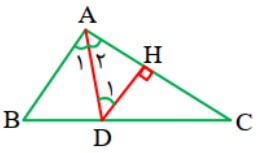



$$\overset{\Delta}{BEC}: AD \parallel BE \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{BE} = \frac{CD}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{BE} = \frac{CD}{AD.BC} \quad (۱)$$
$$\overset{\Delta}{BCF}: AD \parallel CF \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{CF} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{CF} = \frac{BD}{AD.BC}$$
$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{۱}{BE} + \frac{۱}{CF} = \frac{CD}{AD.BC} + \frac{BD}{AD.BC}$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{BE} + \frac{۱}{CF} = \frac{CD+BD}{AD.BC} \Rightarrow \frac{۱}{BE} + \frac{۱}{CF} = \frac{BC}{AD.BC}$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{BE} + \frac{۱}{CF} = \frac{۱}{AD} \Rightarrow \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۱۲} = \frac{۱}{AD} \Rightarrow \frac{۳+۴}{۴۸} = \frac{۱}{AD} \Rightarrow AD = \frac{۴۸}{۷}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵

$$\text{نیمساز } AD \to \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$
$$\left.\begin{matrix} DH \perp AC \\ AB \perp AC \end{matrix}\right\} \to DH \parallel AB \xrightarrow{\text{مورب } AD} \hat{A}_1 = \hat{D}_1 \Bigg\} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{D}_1$$




پس مثلث $\overset{\triangle}{ADH}$ متساوی‌الساقین و $AH = DH$ است.

از طرف دیگر، $AB \parallel DH$، پس داریم:

$$\frac{CH}{AC} = \frac{DH}{AB} \xrightarrow[AH=DH=۲]{AC=۶} \frac{۶-۲}{۶} = \frac{۲}{AB} \Rightarrow AB = ۳$$

در مثلث $\overset{\triangle}{ABD}$ ارتفاع وارد بر AB (فاصله نقطه D از ضلع AB) با فاصله نقطه D از AC یعنی DH برابر است. (چون AD نیمساز است و فاصله هر نقطه روی آن از دو ضلع زاویه برابر است.)

$$S_{\overset{\triangle}{ABD}} = \frac{۱}{۲} AB \times h = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۲ = ۳$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶

دو مثلث $\overset{\triangle}{ABD}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ به حالت تناسب دو ضلع و برابری زاویهٔ بین متشابه هستند.

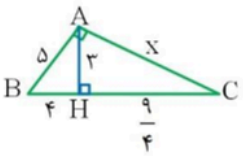
$$\left.\begin{matrix} \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB} = ۲ \\ \hat{B} = \hat{B} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABD} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{AC}{AD} = ۲ \Rightarrow \frac{۱۰}{AD} = ۲ \Rightarrow AD = ۵$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷

در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{ABH}$ داریم:

$$AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ \xrightarrow[AH=۳]{AB=۵} BH = ۴$$
$$AB^۲ = BH \times BC \xrightarrow[BH=۴]{AB=۵} ۲۵ = ۴ \times BC \Rightarrow BC = \frac{۲۵}{۴}$$
$$HC = BC - BH \Rightarrow HC = \frac{۲۵}{۴} - ۴ = \frac{۹}{۴}$$
$$AC^۲ = HC \times CB = \frac{۹}{۴} \times \frac{۲۵}{۴} = \frac{۲۲۵}{۱۶} \Rightarrow AC = \frac{۱۵}{۴}$$




(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸

در مثلث ABC با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

$$AC = \sqrt{BC^۲ - AB^۲} = \sqrt{۴۰۰ - ۲۵۶} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲$$

دو مثلث CED و ABC به حالت دو زاویهٔ مساوی متشابهند، زیرا $\hat{C}$ در هر دو مشترک و $\hat{A} = \hat{E} = ۹۰^\circ$ است، پس با نوشتن نسبت تشابه داریم:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DC}{BC} = \frac{EC}{AC} \Rightarrow \frac{۶}{۱۶} = \frac{EC}{۱۲} \Rightarrow EC = ۴/۵$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۹** با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $\overset{\triangle}{BMH}$ داریم:

$$MH=\sqrt{۴۰۰-۲۵۶}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲$$

دو مثلث $\overset{\triangle}{BMH}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ به حالت دو زاویه مساوی متشابهند، زیرا $\hat{B}$ در هر دو مشترک است و $\hat{H}=\hat{A}=۹۰^\circ$، بنابراین داریم:

$$\overset{\triangle}{ABC}\sim\overset{\triangle}{BMH}\Rightarrow\frac{BC}{BM}=\frac{AB}{BH}=\frac{AC}{MH}\xrightarrow{AB=۲BM=۴۰}\frac{BC}{۲۰}=\frac{۴۰}{۱۶}\Rightarrow BC=۵۰$$

$$HC=BC-BH=۵۰-۱۶=۳۴$$

در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{ABC}$ بنا به قضیه فیثاغورس داریم:

$$AC=\sqrt{۵۰^۲-۴۰^۲}=\sqrt{۲۵۰۰-۱۶۰۰}=\sqrt{۹۰۰}=۳۰$$

$$\text{محیط چهارضلعی AMHC}=۱۲+۲۰+۳۰+۳۴=۹۶$$

فاصلهٔ رأس A تا ضلع BC برابر است با:

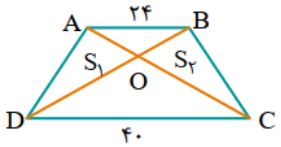
$$AH'=\frac{AB\times AC}{BC}=\frac{۴۰\times۳۰}{۵۰}=۲۴$$

$$\frac{\text{محیط چهارضلعی AMHC}}{\text{فاصلهٔ A از ضلع BC}}=\frac{۹۶}{۲۴}=۴$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۰** در هر ذوزنقه به شکل زیر همواره مساحت‌های مثلث‌های محدود به دو قطر و یک ساق یعنی مثلث‌های $\overset{\triangle}{AOD}$ و $\overset{\triangle}{BOC}$ با هم برابر است.

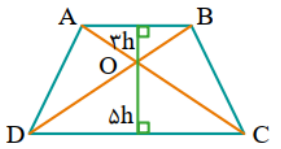
بنابراین طبق فرض مسئله:




$$S_۱=S_۲=۱۵۰$$

از طرفی، دو مثلث $\overset{\triangle}{OAB}$ و $\overset{\triangle}{DOC}$ با هم متشابهند و نسبت تشابه آن‌ها برابر $\frac{AB}{DC}=\frac{۲۴}{۴۰}=\frac{۳}{۵}$ است، پس نسبت ارتفاع‌های این دو مثلث نیز برابر نسبت تشابه است، یعنی ارتفاع‌های این دو مثلث برابر $۳h$ و $۵h$ خواهند بود.

حال کافی است مساحت ذوزنقه را از دو طریق محاسبه کنیم:




$$\text{ذوزنقه}\ S=\frac{(۲۴+۴۰)\times۸h}{۲}=۲۵۶h$$

$$\text{ذوزنقه}\ S=S_{\overset{\triangle}{OAB}}+S_{\overset{\triangle}{OCD}}+S_{\overset{\triangle}{OAD}}+S_{\overset{\triangle}{OBC}}$$

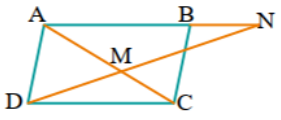
$$=\frac{۱}{۲}\times۲۴\times۳h+\frac{۱}{۲}\times۴۰\times۵h+۱۵۰+۱۵۰=۱۳۶h+۳۰۰$$

$$\Rightarrow ۲۵۶h=۱۳۶h+۳۰۰\Rightarrow ۱۲۰h=۳۰۰\Rightarrow h=\frac{۵}{۲}$$

$$\text{ذوزنقه}\ S=۲۵۶\times\frac{۵}{۲}=۶۴۰$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۱** چون $AN\parallel DC$ است، پس مثلث‌های $\overset{\triangle}{AMN}$ و $\overset{\triangle}{DMC}$ متشابهند و بنابراین خواهیم داشت:




$$\overset{\triangle}{AMN}\sim\overset{\triangle}{DMC}\Rightarrow\frac{AN}{DC}=\frac{AM}{MC}\xrightarrow{AB=CD}\frac{AN}{AB}=\frac{AM}{MC}\ (۱)$$

$$\text{طبق فرض}:\frac{AM}{AC}=\frac{۵}{۹}\Rightarrow\frac{AM}{AC-AM}=\frac{۵}{۹-۵}\Rightarrow\frac{AM}{MC}=\frac{۵}{۴}\xrightarrow{(۱)}\frac{AN}{AB}=\frac{۵}{۴}$$

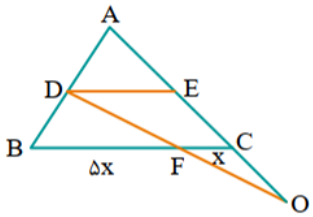
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۲** با فرض $FC = x$ خواهیم داشت: $BF = ۵x$

حالا طبق قضیه تالس در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{DE}{۶x} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow DE = ۳x$$

و اگر قضیه تالس را در مثلث $\overset{\triangle}{ODE}$ بنویسیم، خواهیم داشت:



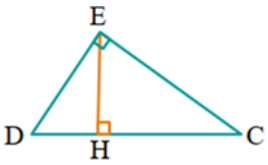

$$\frac{FC}{DE} = \frac{OC}{OE} \Rightarrow \frac{x}{۳x} = \frac{OC}{OE} \Rightarrow \frac{OC}{OE} = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{OC}{OE - OC} = \frac{۱}{۳-۱} \Rightarrow \frac{OC}{EC} = \frac{۱}{۲}$$

چون D وسط AB است و $DE \parallel BC$، پس E نیز وسط AC است، یعنی $AE = EC$ و در نتیجه $\frac{OC}{AE} = \frac{۱}{۲}$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۳** در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{EDC}$ داریم:




$$ED = t \ , \ DC = z \ , \ EC = ۱۲ \ , \ EH = ۷/۲ = \frac{۳۶}{۵}$$

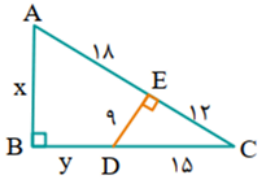
طبق ویژگی‌های مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$EH \times DC = ED \times EC \Rightarrow z \times \frac{۳۶}{۵} = t \times ۱۲ \Rightarrow t = \frac{۳}{۵}z$$

$$\text{فیثاغورس}: t^۲ + ۱۴۴ = z^۲ \Rightarrow \frac{۹}{۲۵}z^۲ + ۱۴۴ = z^۲ \Rightarrow \frac{۱۶}{۲۵}z^۲ = ۱۴۴$$

$$\Rightarrow z^۲ = \frac{۲۵ \times ۱۴۴}{۱۶} \Rightarrow z = ۱۵ \Rightarrow t = \frac{۳}{۵} \times ۱۵ \Rightarrow t = ۹$$

حال با توجه به شکل مقابل، مثلث‌های $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{DEC}$ به حالت دو زاویه مساوی متشابهند، زیرا:



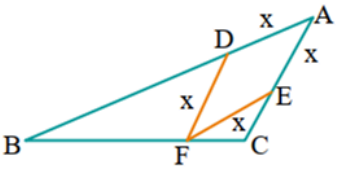

$$\begin{cases} \hat{C} \text{ مشترک} \\ \hat{B} = \hat{E} = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{DEC}$$

$$\text{نسبت تشابه}: \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{CE} \Rightarrow \frac{x}{۹} = \frac{۳۰}{۱۵} = \frac{y+۱۵}{۱۲}$$

$$\Rightarrow x = ۱۸ \ , y = ۹ \Rightarrow ۲x + ۳y = ۳۶ + ۲۷ = ۶۳$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۴** با توجه به شکل، اگر طول ضلع لوزی ADFE را برابر x فرض کنیم با استفاده از تعمیم قضیه تالس خواهیم داشت:



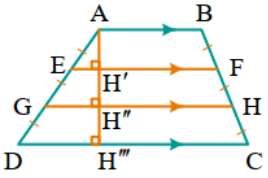

$$FE \parallel AB \Rightarrow \frac{FE}{AB} = \frac{CE}{AC} = \frac{FC}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۲۸} = \frac{۱۶-x}{۱۶} = \frac{FC}{۲۰} \Rightarrow ۴۴۸ - ۲۸x = ۱۶x \Rightarrow ۴۴x = ۴۴۸ \Rightarrow x = \frac{۱۱۲}{۱۱}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{۱۱۲}{۱۱}}{۲۸} = \frac{FC}{۲۰} \Rightarrow FC = \frac{۱۱۲}{۱۱ \times ۲۸} \times ۲۰ = \frac{۸۰}{۱۱}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۵** می‌دانیم خطی که وسط‌های دو ساق ذوزنقه‌ای را به هم وصل می‌کند، موازی دو قاعده و اندازهٔ آن برابر میانگین دو قاعده است، پس داریم:




$$GH = \frac{۵}{۴}EF$$

فرض می‌کنیم $EF = ۴x$ و $GH = ۵x$

$$EF = \frac{AB+GH}{۲} \Rightarrow ۴x = \frac{AB+۵x}{۲} \Rightarrow AB = ۳x$$

$$GH = \frac{EF+DC}{۲} \Rightarrow ۵x = \frac{۴x+DC}{۲} \Rightarrow DC = ۶x$$

چون فاصلهٔ خطوط موازی با هم برابر است، پس داریم: $AH' = H'H'' = H''H'''$

و بنابراین می‌توان نوشت:

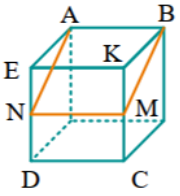
$$\frac{S_{ABCD}}{S_{ABFE}} = \frac{\frac{۱}{۲}(AB+CD)\times AH'''}{\frac{۱}{۲}(AB+EF)\times AH'} = \frac{\frac{۱}{۲}(۳x+۶x)\times ۳AH'}{\frac{۱}{۲}(۳x+۴x)AH'} = \frac{۲۷}{۷}$$

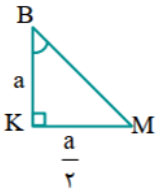
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۶** اگر اندازه یال مکعب a باشد، آن‌گاه $AD = BC = a\sqrt{۲}$، پس مساحت صفحه گذرنده از A و B و C و D، مساحت مستطیل به اضلاع a و $a\sqrt{۲}$ است، پس:

$$a\times a\sqrt{۲} = ۱۸\sqrt{۲} \Rightarrow a^۲ = ۱۸ \Rightarrow a = ۳\sqrt{۲}$$

از طرفی، مطابق شکل، در مثلث $\overset{\triangle}{BMK}$ یا $\overset{\triangle}{ANE}$ داریم:




$$BM = \sqrt{a^۲ + \frac{a^۲}{۴}} = \sqrt{\frac{۵a^۲}{۴}} = \frac{a}{۲}\sqrt{۵}$$

در نتیجه مساحت مستطیل ABMN برابر است با:

$$S_{ABMN} = BM\times MN = \frac{a}{۲}\sqrt{۵}\times a = \frac{a^۲\sqrt{۵}}{۲} \xrightarrow{a=۳\sqrt{۲}} S_{ABMN} = \frac{(۳\sqrt{۲})^۲}{۲}\sqrt{۵} = ۹\sqrt{۵}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۷** وقتی مثلثی متساوی‌الاضلاع حول یک ضلع آن دوران می‌کند دو مخروط مطابق شکل پدید می‌آید.

$$\text{ضلع مثلث} = a \Rightarrow \begin{cases} \text{شعاع قاعده} = a\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \text{ارتفاع} = \frac{a}{۲} \end{cases}$$




دقت کنید ارتفاع مثلث، شعاع قاعده مخروط و نصف ضلع مثلث، برابر ارتفاع مخروط است.

$$\text{حجم یکی از مخروط‌ها} = \frac{\pi}{۳}(a\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲(\frac{a}{۲})$$

$$V_۱ = \frac{\pi}{۳} \times \frac{۳a^۳}{۸} \Rightarrow \text{حجم دو مخروط} = \frac{\pi a^۳}{۴}$$

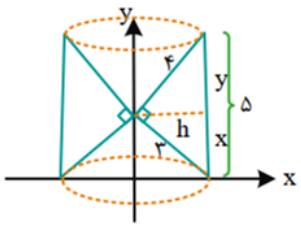
پس اگر مثلث متساوی‌الاضلاع حول یک ضلع دوران کند، حجم از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$V = \frac{\pi a^۳}{۴}$$

$$\frac{\pi a^۳}{۴} = ۱۶\pi \Rightarrow a^۳ = ۶۴ \Rightarrow a = ۴$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۸** از دوران پاره‌خط AB حول محور عرض‌ها یک استوانه به دست می‌آید که ۲ مخروط از آن حذف کرده باشیم.




$$۵h = ۱۲ \Rightarrow h = \frac{۱۲}{۵}$$

$$۹ = ۵x \Rightarrow x = \frac{۹}{۵}$$

$$۱۶ = ۵y \Rightarrow y = \frac{۱۶}{۵}$$

$$V = \text{حجم استوانه} - (\text{حجم مخروط پایین}) - (\text{حجم مخروط بالا})$$

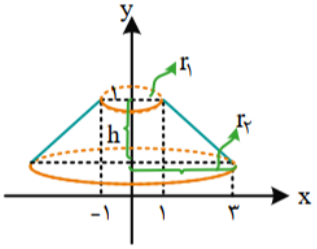
$$V = \pi \times (\frac{۱۲}{۵})^۲ \times ۵ - (\frac{\pi}{۳} \times (\frac{۱۲}{۵})^۲ \times \frac{۹}{۵}) - (\frac{\pi}{۳} \times (\frac{۱۲}{۵})^۲ \times \frac{۱۶}{۵})$$

$$V = (\frac{۱۲}{۵})^۲ \pi (۵ - \frac{۳}{۵} - \frac{۱۶}{۱۵})$$

$$V = \frac{۱۴۴\pi}{۲۵} \times \frac{۷۵ - ۹ - ۱۶}{۱۵} = \frac{۱۴۴\pi}{۲۵} \times \frac{۱۰}{۳} = \frac{۹۶\pi}{۵}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۹** از دوران پاره‌خط AB حول محور عرض‌ها یک مخروط ناقص پدید می‌آید، به طوری که:

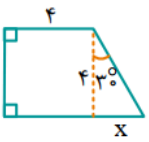



$$r_۱ = ۱ \, , \, r_۲ = ۳ \, , \, h = ۲$$

$$\text{مخروط ناقص } V = \frac{\pi}{۳}(r_۱^۲ + r_۲^۲ + r_۱ r_۲).h = \frac{\pi}{۳}(۱ + ۹ + ۳) \times ۲ = \frac{۲۶\pi}{۳}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۰** بعد از دوران حول قاعده بزرگ یک استوانه و یک مخروط پدید می‌آید به طوری که:




$$\text{استوانه}\begin{cases}r=۴\\h=۴\end{cases}\Rightarrow V_۱=\pi r^۲h=۶۴\pi$$

$$\tan ۳۰^\circ=\frac{x}{۴}\Rightarrow x=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\text{مخروط}\begin{cases}r=۴\\h=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}\end{cases}$$

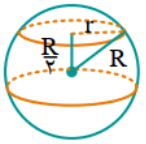
$$V_۲=\frac{\pi}{۳}\times ۱۶\times\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

$$V=V_۱+V_۲=۶۴\pi+۶۴\pi.\frac{\sqrt{۳}}{۹}=۶۴\pi(\frac{۹+\sqrt{۳}}{۹})$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۱**

$$r^۲=R^۲-\frac{R^۲}{۴}\Rightarrow r^۲=\frac{۳}{۴}R^۲\Rightarrow r=\frac{\sqrt{۳}}{۲}R\Rightarrow S=\pi r^۲$$




$$\Rightarrow S=\frac{۳}{۴}\pi R^۲\Rightarrow\frac{۳}{۴}\pi R^۲=۱۲\pi$$

$$\Rightarrow R^۲=\frac{۱۲\times ۴}{۳}\Rightarrow R=۴$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۲**

$$FF'=۲c=۴\Rightarrow c=۲$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=۴$$

از طرفی:

چون M روی بیضی است، پس $MF+MF'=۲a$، لذا:

$$۲x+x^۲=۸\Rightarrow x=۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۳** با توجه به آن‌که مثلث $\overset{\Delta}{AOB}$ قائم‌الزاویه است، پس:

$$\tan\alpha=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow a=b\sqrt{۳}$$

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^۲}{a^۲}}=\sqrt{\frac{a^۲-b^۲}{a^۲}}=\sqrt{۱-(\frac{b}{a})^۲}$$

$$e=\sqrt{۱-\frac{۱}{۳}}=\sqrt{\frac{۲}{۳}}=\frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۴** با توجه به آن‌که مثلث در رأس B قائمه است، پس OB ارتفاع وارد بر وتر است، پس:

$$OB^۲ = OF.OA \Rightarrow b^۲ = ac$$

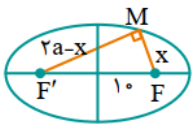
از طرفی، $b^۲ = a^۲ - c^۲$، یعنی:

$$a^۲ - ac - c^۲ = ۰ \Rightarrow \frac{c^۲}{a^۲} + \frac{c}{a} - ۱ = ۰$$

$$\frac{c}{a} = e \Rightarrow e^۲ + e - ۱ = ۰ \Rightarrow e = \frac{-۱ + \sqrt{۵}}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۵**




$$۲a = ۱۴ \Rightarrow a = ۷$$
$$۲b = ۴\sqrt{۶} \Rightarrow b = ۲\sqrt{۶} \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲$$
$$۴۹ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۴۹ = ۲۴ + c^۲ \Rightarrow c = ۵$$

می‌دانیم $MF + MF' = ۲a$، پس با فرض $MF = x$ داریم:

$$(۱۴ - x)^۲ + x^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow ۲x^۲ + ۱۹۶ - ۲۸x = ۱۰۰ \Rightarrow x^۲ - ۱۴x + ۴۸ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۶ \\ x = ۸ \end{cases}$$

اگر فاصله M تا محور، h باشد، آن‌گاه:

$$۱۰h = ۶ \times ۸ \Rightarrow h = ۴/۸$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۶** تلاقی دو قطر، مرکز دایره است.

$$-۲\begin{cases} ۲x + y = ۳ \\ ۳y + x = -۱ \end{cases} \Rightarrow -۵y = ۵ \Rightarrow y = -۱, x = ۲$$

یعنی $C(۲, -۱)$ مرکز دایره است، چون دایره از مبدأ مختصات عبور می‌کند، پس فاصله C تا مبدأ شعاع دایره است.

$$R = OC = \sqrt{۵}$$
$$\Rightarrow \text{معادله دایره} : (x - ۲)^۲ + (y + ۱)^۲ = ۵$$

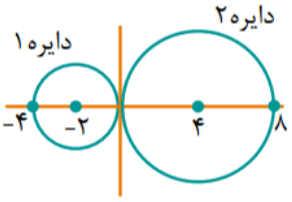
نیمساز ناحیه اول و سوم یعنی $y = x$ را با دایره قطع می‌دهیم.

$$(x - ۲)^۲ + (x + ۱)^۲ = ۵ \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۴ + x^۲ + ۲x + ۱ = ۵ \Rightarrow x^۲ - x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۱ \end{cases}$$

$$A\Big|_{۰}^{۰}$$
$$B\Big|_{۱}^{۱}$$
$$AB = \sqrt{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۷**




$$x^۲ + ۴x + y^۲ = ۰ \Rightarrow (x + ۲)^۲ + y^۲ = ۴ \quad O_۱\Big|_{۰}^{-۲}, R_۱ = ۲$$
$$x^۲ - ۸x + y^۲ = ۰ \Rightarrow (x - ۴)^۲ + y^۲ = ۱۶ \quad O_۲\Big|_{۰}^{۴}, R_۲ = ۴$$

قرار است دایره بر هر ۲ دایره مماس باشد. پس شعاع آن را ۶ و مرکز آن را $C(۲, ۰)$ در نظر می‌گیریم.

$$(x - ۲)^۲ + y^۲ = ۳۶ \Rightarrow x^۲ - ۴x + y^۲ = ۳۲$$
$$a + k = ۲۸$$

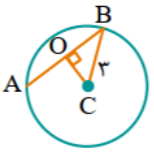
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۸**

$(x+۲)^۲+(y-۲)^۲=۹ \Rightarrow C\begin{vmatrix}-۲\\۲\end{vmatrix}$ و مرکز $R=۳$

بلندترین وتری که از یک نقطه درون دایره می‌گذرد به اندازه قطر دایره است. پس بلندترین وتر برابر $d=۶$ است.

کوتاه‌ترین وتر مطابق شکل، وتر AB است، به طوری که:




$O\begin{vmatrix}۰\\۰\end{vmatrix}, C\begin{vmatrix}-۲\\۲\end{vmatrix} \Rightarrow OC=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$

$OB=\sqrt{۹-۸}=۱ \Rightarrow$ کوتاه‌ترین وتر $=۲$

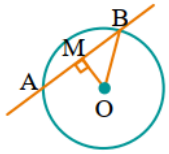
اختلاف $=۴ \Rightarrow$ کوتاه‌ترین وتر $=۲ \Rightarrow$ بلندترین وتر $=۶$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۹**

$(x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۴+۴+۱=۹$ $O\begin{vmatrix}-۱\\۲\end{vmatrix}, R=۳$

مرکز دایره $O\begin{vmatrix}-۱\\۲\end{vmatrix}$ و شعاع دایره ۳ است. چون وتری به طول ۴ جدا می‌کند، پس در شکل زیر داریم:




$MB=\frac{۴}{۲}=۲ \Rightarrow OM=\sqrt{۵}$

$OB=۳$

یعنی فاصله مرکز دایره تا خط داده شده $\sqrt{۵}$ است، پس:

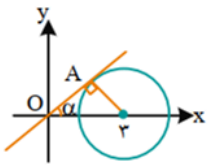
$O\begin{vmatrix}-۱\\۲\end{vmatrix}, d=\frac{|-۲+۲-a|}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$

$|a|=۵ \Rightarrow a=\pm ۵$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۳۰**

مرکز دایره $O(۳,۰)$ و شعاع آن یک واحد است. پس معادله دایره به صورت $(x-۳)^۲+y^۲=۱$ است.




$\sin\alpha=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \tan\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

در واقع شیب خط گذرنده از A را به دست آورده‌ایم، پس: $OA: y=\frac{\sqrt{۲}}{۴}x$

اکنون معادله تلاقی خط OA با دایره را می‌نویسیم تا مختصات نقطه A به دست آید:

$(x-۳)^۲+\frac{۱}{۸}x^۲=۱ \Rightarrow \frac{۹}{۸}x^۲-۶x+۸=۰$

$۹x^۲-۴۸x+۶۴=۰ \xrightarrow{\Delta=۰} (۳x-۸)^۲=۰ \begin{cases} x_۱=\frac{۸}{۳} \\ x_۲=\frac{۸}{۳} \end{cases}$

**تذکر:** دقت شود که چون خط OA بر دایره مماس است، پس معادله درجه دوم حاصل، دارای ریشه مضاعف می‌باشد.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۳۱**

$$(x-۱)^۲+(y-۴)^۲=-۸+۱۶+۱=۹$$

در دایره اول $C(۱,۴)$، مرکز و $R=۳$ شعاع است.

$$x^۲+y^۲-۸x+k=۰\Rightarrow(x-۴)^۲+y^۲=۱۶-k$$

در دایره دوم $C'(۴,۰)$ مرکز و $R'=\sqrt{۱۶-k}$ شعاع است. چون دو دایره بر هم مماس هستند، دو حالت داریم یا مماس داخل یا مماس خارج.

$$CC'=۵\Rightarrow\begin{cases}R_۱+R_۲=۵ & \text{مماس خارج}\\ |R_۱-R_۲|=۵ & \text{مماس داخل}\end{cases}$$

$$۳+\sqrt{۱۶-k}=۵\Rightarrow ۱۶-k=۴\Rightarrow k=۱۲$$

$$|\sqrt{۱۶-k}-۳|=۵\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{۱۶-k}=۸\Rightarrow k=-۴۸\\ \sqrt{۱۶-k}=-۲ \text{ غ ق ق}\end{cases}$$

جمع مقادیر به دست آمده برای $k$ برابر $-۳۶$.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۳۲**

$$x^۲-۲x+y^۲+۴y+۴=۰\Rightarrow(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۱$$

$M$ روی دایره با مرکز $C_۱(۱,-۲)$ و شعاع ۱ قرار دارد.

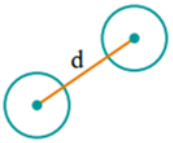
$$x^۲-۸x+y^۲-۴y=-۱۹\Rightarrow(x-۴)^۲+(y-۲)^۲=۱$$

$N$ روی دایره با مرکز $C_۲(۴,۲)$ و شعاع ۱ قرار دارد.

ابتدا فاصله ۲ مرکز را به دست می‌آوریم:

$$C_۱C_۲=\sqrt{(۴-۱)^۲+(۲+۲)^۲}$$

$$C_۱C_۲=۵>۱+۱\Rightarrow \text{متخارج}$$




دو دایره خارج یکدیگر هستند.

$$\max=d+R_۱+R_۲ \quad و \quad \min=d-(R_۱+R_۲)$$

$$\text{فاصله}\max=C_۱C_۲+R_۱+R_۲=۷$$
$$\text{فاصله}\min=C_۱C_۲-R_۱-R_۲=۳$$
$$\Rightarrow\frac{\max}{\min}=\frac{۷}{۳}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۳۳**

چون مساحت دایره کمترین است، پس $A$ و $B$ دو سر قطر دایره هستند، پس مرکز دایره وسط $A$ و $B$ است.

$$O\left|\begin{matrix}\frac{۴-۲}{۲}=۱\\ \frac{-۳+۱}{۲}=-۱\end{matrix}\right.$$

$$AB=\sqrt{۶^۲+۴^۲}=\sqrt{۳۶+۱۶}=\sqrt{۵۲}=۲R$$
$$\Rightarrow ۲R=۲\sqrt{۱۳}\Rightarrow R=\sqrt{۱۳}$$

پس $O\left|\begin{matrix}۱\\ -۱\end{matrix}\right.$ مرکز دایره و $R=\sqrt{۱۳}$ شعاع دایره است.

معادله دایره را می‌نویسیم:

$$(x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۱۳$$

$$x=۰\Rightarrow(y+۱)^۲=۱۲\Rightarrow\begin{cases}M(۰,\sqrt{۱۲}-۱)\\ N(۰,-\sqrt{۱۲}-۱)\end{cases}$$

$$MN=|\sqrt{۱۲}-۱+\sqrt{۱۲}+۱|=۲\sqrt{۱۲}=۴\sqrt{۳}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

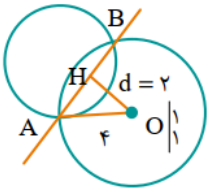
**۳۴** ابتدا دو دایره را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$x^۲+y^۲+y+۲x-۱۱=x^۲+y^۲-۲x-۲y-۱۴\Rightarrow y+۲x+۲y+۲x=-۳\Rightarrow ۳y+۴x=-۳$$

این خط وتر مشترک دو دایره است.

$$x^۲-۲x+y^۲-۲y=۱۴\Rightarrow (x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۱۶$$

$$O\begin{vmatrix}۱\\۱\end{vmatrix},\ R=۴$$



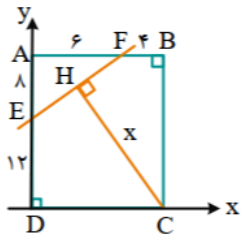

فاصله O تا وتر مشترک را به دست می‌آوریم و آن را d می‌نامیم.

$$۳y+۴x+۳=۰\Rightarrow d=\frac{۱۰}{۵}=۲\Rightarrow AB=۲AH$$

$$AB=۲\times\sqrt{OA^۲-d^۲}=۲\sqrt{۱۲}=۴\sqrt{۳}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۳۵**




$$E\begin{vmatrix}۰\\۱۲\end{vmatrix}\ F\begin{vmatrix}۶\\۲۰\end{vmatrix}\Rightarrow m_{EF}=\frac{۲۰-۱۲}{۶-۰}=\frac{۴}{۳}$$

معادلهٔ EF: $y=\frac{۴}{۳}x+۱۲$

$$C\begin{vmatrix}۱۰\\۰\end{vmatrix},\ ۴x-۳y+۳۶=۰\Rightarrow CH=\frac{|۴۰-۰+۳۶|}{۵}\Rightarrow CH=۱۵/۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۳۶** در مثلث $\overset{\triangle}{AFC}$ طبق قضیهٔ تالس می‌توان نتیجه گرفت: $EF=۴$

در مثلث $\overset{\triangle}{BED}$ داریم:

$$\frac{BF}{BE}=\frac{FC}{ED}\Rightarrow\frac{۲}{۲+۴}=\frac{۶}{۳+x}\Rightarrow x=۱۵$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۳۷** دو مثلث FBC و FED متشابه با نسبت تشابه ۳ می‌باشند. پس مساحت مثلث FDC، سه برابر مساحت FED می‌باشد. (مساحت FDC برابر ۶ می‌باشد).

حالا:

$$S_{AEFB}+S_{\overset{\triangle}{EFD}}=S_{\overset{\triangle}{BFC}}+S_{\overset{\triangle}{CFD}}\Rightarrow S_{AEFB}+۲=۱۸+۶\Rightarrow S_{AEFB}=۲۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۳۸** ابتدا a را به دست می‌آوریم:

$$FF'=۲c=۵-(-۱)=۶\Rightarrow c=۳$$

$$e=\frac{c}{a}=۰/۶\Rightarrow\frac{۳}{a}=\frac{۶}{۱۰}\Rightarrow a=۵$$

M بر بیضی واقع است. بنابراین: $MF+MF'=۲a$

$$\sqrt{(-\frac{۱}{۲}+۱)^۲+k^۲}+\sqrt{(-\frac{۱}{۲}-۵)^۲+k^۲}=۱۰\xrightarrow{k^۲=x}\sqrt{x+\frac{۱}{۴}}+\sqrt{x+\frac{۱۲۱}{۴}}=۱۰$$

با امتحان گزینه‌ها $x=۱۲$ قابل قبول است. بنابراین: $k^۲=۱۲$ می‌باشد.

حال معادله را به صورت کامل حل می‌کنیم:

$$\sqrt{x+\frac{۱۲۱}{۴}}=۱۰-\sqrt{x+\frac{۱}{۴}}\xrightarrow{\text{توان ۲}}x+\frac{۱۲۱}{۴}=۱۰۰+x+\frac{۱}{۴}-۲۰\sqrt{x+\frac{۱}{۴}}$$

$$\Rightarrow ۲۰\sqrt{x+\frac{۱}{۴}}=۷۰\Rightarrow\sqrt{x+\frac{۱}{۴}}=\frac{۷}{۲}\Rightarrow x+\frac{۱}{۴}=\frac{۴۹}{۴}\Rightarrow x=۱۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۳۹** معادلهٔ دایرهٔ $C'$ را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$(x-۲)^۲-۴+(y-۱)^۲-۱+۴=۰ \Rightarrow (x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۱ \Rightarrow O'(۲,۱)\ ,\ R'=۱$$

طول خط‌المرکزین را حساب می‌کنیم:

$$d=OO'=\sqrt{(۵-۲)^۲+(-۳-۱)^۲}=۵$$

اگر دو دایره مماس بیرونی باشند، آن‌گاه:

$$R+R'=d \Rightarrow R+۱=۵ \Rightarrow R=۴$$

اگر دو دایره مماس درونی باشند، آن‌گاه:

$$|R-R'|=d \Rightarrow |R-۱|=۵ \Rightarrow R=۶$$

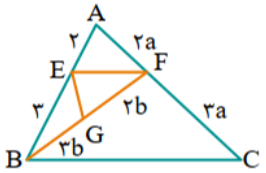
بنابراین:

$$R_۱+R_۲=۴+۶=۱۰$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۴۰** با توجه به قضیهٔ تالس AF و FC به صورت ۲a و ۳a و FG و BG به صورت ۲b و ۳b می‌باشند.

ارتفاع BH برای سه مثلث ABC و BFC، ABF مشترک بوده و نسبت قاعده‌های آن‌ها ۵a، ۳a، ۲a می‌باشد. بنابراین:




$$S_{\triangle BFC}=\frac{۳}{۵}S_{\triangle ABC}$$

$$S_{\triangle ABF}=\frac{۲}{۵}S_{\triangle ABC}$$

دو مثلث BEG و ABF با نسبت تشابه $\frac{۳}{۵}$ متشابه می‌باشند. بنابراین:

$$\frac{S_{\triangle BEG}}{S_{\triangle ABF}}=(\frac{۳}{۵})^۲=\frac{۹}{۲۵}$$

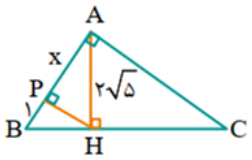
$$\Rightarrow S_{\triangle BEG}=\frac{۹}{۲۵}S_{\triangle ABF}=\frac{۹}{۲۵}(\frac{۲}{۵}S_{\triangle ABC})=\frac{۱۸}{۱۲۵}S_{\triangle ABC}$$

خواهیم داشت:

$$\frac{S_{\triangle BEG}}{S_{\triangle BFC}}=\frac{\frac{۱۸}{۱۲۵}S_{\triangle ABC}}{\frac{۳}{۵}S_{\triangle ABC}}=\frac{۶}{۲۵}=۰/۲۴$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۴۱**




خواهیم داشت:

$$ABH: AH^۲=AP\times AB \Rightarrow AH^۲=x(x+۱)=۲۰ \Rightarrow x^۲+x-۲۰=۰$$

$$(x+۵)(x-۴)=۰ \Rightarrow x=۴$$

$$PH^۲=BP\times AP=۱\times ۴ \Rightarrow PH=۲$$

$$PH \parallel AC \Rightarrow \frac{BP}{AB}=\frac{PH}{AC} \Rightarrow \frac{۱}{۵}=\frac{۲}{AC} \Rightarrow AC=۱۰$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۴۲** معادلهٔ دو دایره را به صورت کانونیک می‌نویسیم:

$$x^۲+y^۲-۴x-۶y=۴ \Rightarrow (x-۲)^۲+(y-۳)^۲-۴-۹=۴ \Rightarrow (x-۲)^۲+(y-۳)^۲=۱۷ \Rightarrow O(۲,۳), R=\sqrt{۱۷}$$

$$x^۲+y^۲-۴x+۲y=۱۱ \Rightarrow (x-۲)^۲+(y+۱)^۲-۴-۱=۱۱ \Rightarrow (x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۱۶ \Rightarrow O'(۲,-۱), R'=۴$$

کانون‌های بیضی $F(۲,۳)$ و $F'(۲,-۱)$ و قطر کوچک آن برابر ۸ است.

$$FF'=۲c=۴ \Rightarrow c=۲ \qquad ۲b=۸ \Rightarrow b=۴$$

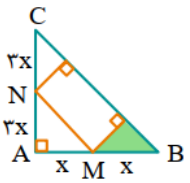
$$a^۲=b^۲+c^۲=۱۶+۴=۲۰ \Rightarrow a=۲\sqrt{۵}$$

خواهیم داشت:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{۲}{۲\sqrt{۵}}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۴۳** در ابتدا فرض می‌کنیم $AM=x$ و با توجه به فرضیات داده شده تمام اضلاع را بر حسب $x$ می‌نویسیم:




$$\text{طول مستطیل} = \sqrt{۱۰}x$$

$$\text{عرض مستطیل} = \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}x \Rightarrow \text{مستطیل } S = ۳x^۲$$

$$\text{مساحت مثلث سایه خورده} = \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}x\times\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}x = \frac{۳}{۲۰}x^۲$$

$$\text{نسبت مساحت‌ها} = \frac{\frac{۳}{۲۰}x^۲}{۳x^۲} = \frac{۱}{۲۰}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۴۴**

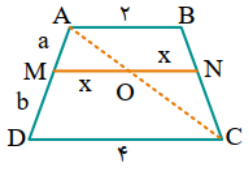
$$\frac{MN}{AB}=\frac{DN}{BD} \text{ و } \frac{MN}{CD}=\frac{BN}{BD} \Rightarrow \frac{MN}{AB}+\frac{MN}{CD}=۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{DC}+\frac{۱}{AB}=\frac{۱}{MN} \Rightarrow \frac{۱}{x}+\frac{۱}{\frac{۵}{۳}x}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{x}+\frac{۳}{۵x}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۸}{۵x}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=\frac{۱۶}{۵} \Rightarrow \begin{cases} DC=\frac{۱۶}{۵} \\ AB=\frac{۱۶}{۳} \end{cases}$$

$$\text{اختلاف طول} = \left|\frac{۱۶}{۵}-\frac{۱۶}{۳}\right| = ۱۶\times\frac{۲}{۱۵} = \frac{۳۲}{۱۵}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۴۵**




$$\triangle ADC: \frac{AM}{AD}=\frac{AO}{AC}=\frac{OM}{DC} \Rightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{AO}{AC}=\frac{x}{۴} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AO}{AC}=\frac{a}{a+b} \Rightarrow \frac{OC}{AC}=\frac{b}{a+b} \\ \frac{a}{a+b}=\frac{x}{۴} \quad (۱) \end{cases}$$

$$\triangle ABC: \frac{ON}{AB}=\frac{OC}{AC} \Rightarrow \frac{x}{۲}=\frac{b}{a+b} \quad (۲)$$

$$(۱)\text{و}(۲) \Rightarrow \frac{x}{۴}+\frac{x}{۲}=۱$$

$$\frac{۳}{۴}x=۱ \Rightarrow x=\frac{۴}{۳} \Rightarrow MN=\frac{۸}{۳}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۴۶** چون دایره در ناحیه اول بر محورهای مختصات مماس است، پس معادله آن به صورت $(x-R)^۲+(y-R)^۲=R^۲$ است.

چون بر خط $۴x+۳y-۲۴=۰$ مماس است، پس فاصله مرکز دایره تا آن خط، همان شعاع دایره است.

$$R=\frac{|۷R-۲۴|}{۵} \Rightarrow \begin{cases} ۷R-۲۴=۵R \Rightarrow R_۱=۱۲ \\ ۷R-۲۴=-۵R \Rightarrow R_۲=۲ \end{cases}$$

پس اختلاف شعاع‌های دو دایره برابر ۱۰ واحد است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۴۷**

یک مخروط ناقص خواهد شد ⇒ حول AB دوران کند

مخروط + استوانه خواهد شد = حول AD دوران کند

حجم مخروط ناقص ⇒ $V_۱ = \frac{\pi}{۳} \times ۴(۱۶ + ۶۴ + ۳۲) = \frac{۴\pi}{۳} \times ۱۱۲$

حجم استوانه + مخروط $= V_۲ = \pi \times ۱۶ \times ۴ + \frac{\pi}{۳} \times ۱۶ \times ۴ = \frac{۴\pi}{۳} \times ۶۴$

$V_۱ - V_۲ = \frac{۴\pi}{۳}(۱۱۲ - ۶۴) = \frac{۴\pi}{۳} \times ۴۸ = ۶۴\pi$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۴۸**

شکل حاصل از دوران لوزی حول قطرش، دو مخروط است که قاعده مشترک دارند، بنابراین خواهیم داشت:

$V = ۲ \times \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۲}{۳} \times \pi \times ۲^۲ \times ۳ = ۸\pi$




(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۴۹**

چون نقاط $M_۱$ و $M_۲$ روی بیضی هستند، پس $M_۱F + M_۱F' = ۲a$ و $M_۲F + M_۲F' = ۲a$ و همچنین $FF' = ۲c$ در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} P_۱ = M_۱F + M_۱F' + FF' = ۲a + ۲c \\ P_۲ = M_۲F + M_۲F' + FF' = ۲a + ۲c \end{cases} \Rightarrow P_۱ = P_۲ = ۲a + ۲c$$

یعنی محیط هر دو مثلث با هم برابر است.

اما مساحت مثلث‌های $M_۱FF'$ و $M_۲FF'$ با هم برابر نیستند، زیرا در هر دو مثلث قاعدهٔ $FF'$ ثابت است ولی ارتفاع رسم شده از نقطهٔ $M_۱$ کوچک‌تر از ارتفاع رسم شده از نقطهٔ $M_۲$ است در نتیجه $S_۱ < S_۲$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۵۰**

فاصلهٔ خطوط $x = -۵$ و $x = ۱$ برابر ۶ است و فاصلهٔ خطوط $y = -۴$ و $y = ۱۰$ برابر ۱۴ است، پس داریم:

$AA' = ۲a \Rightarrow ۱۴ \Rightarrow a = ۷$

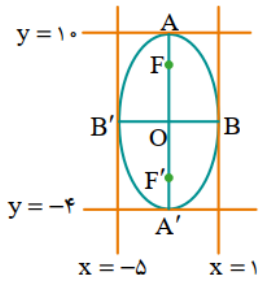
$BB' = ۲b \Rightarrow b = ۳$

پس بیضی، قائم است زیرا قطر بزرگ آن موازی محور عرض‌ها است، یعنی گزاره الف نادرست است.

$c^۲ = a^۲ - b^۲ \Rightarrow c^۲ = ۴۹ - ۹ = ۴۰ \Rightarrow c = ۲\sqrt{۱۰}$

مرکز بیضی: $O(\frac{۱-۵}{۲}, \frac{۱۰-۴}{۲}) = (-۲, ۳)$

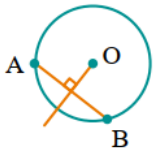
مختصات کانون‌ها: $F(-۲, ۳ + ۲\sqrt{۱۰})$ $F'(-۲, ۳ - ۲\sqrt{۱۰})$




پس گزاره ب نیز نادرست است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۵۱** مرکز دایره‌ای که از دو نقطهٔ مفروض A و B می‌گذرد روی عمودمنصف پاره‌خط AB است، پس کافی است معادلهٔ عمودمنصف AB را بنویسیم و آن را با خط $y = x - ۴$ قطع دهیم:




$$AB \text{ وسط } M(\frac{-۱+۳}{۲}, \frac{۲+۴}{۲}) = (۱,۳)$$

$$m_{AB} = \frac{۴-۲}{-۱-۳} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \text{عمودمنصف } m' = ۲$$

$$AB \text{ معادله عمودمنصف} : y - ۳ = ۲(x-۱) \Rightarrow y = ۲x + ۱$$

$$\begin{cases} y = ۲x+۱ \\ y = x-۴ \end{cases} \Rightarrow ۲x+۱ = x-۴ \Rightarrow x = -۵ \Rightarrow y = -۹ \Rightarrow \text{مرکز دایره } O(-۵,-۹)$$

$$R = OA = \sqrt{(-۵+۱)^۲ + (-۹-۴)^۲} = \sqrt{۱۶+۱۶۹} = \sqrt{۱۸۵}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۵۲** وضعیت نقطهٔ $A(x_۰, y_۰)$ نسبت به دایرهٔ $f(x,y): x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{cases} f(x_۰,y_۰) > ۰ \Rightarrow \text{نقطهٔ A خارج از دایره است.} \\ f(x_۰,y_۰) = ۰ \Rightarrow \text{نقطهٔ A روی دایره است.} \\ f(x_۰,y_۰) < ۰ \Rightarrow \text{نقطهٔ A داخل دایره است.} \end{cases}$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} C_۱ : x^۲ + y^۲ - x + ۲y - ۳ = ۰ \xrightarrow{(m,۱-m)} m^۲ + (۱-m)^۲ - m + ۲(۱-m) - ۳ < ۰ \\ C_۲ : x^۲ + y^۲ + ۴x = ۰ \xrightarrow{(m,۱-m)} m^۲ + (۱-m)^۲ + ۴m > ۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۲m^۲ - ۵m < ۰ \Rightarrow m(۲m-۵) < ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰ < m < \frac{۵}{۲} \quad (۱) \\ ۲m^۲ + ۲m + ۱ > ۰ \Rightarrow \Delta < ۰, a > ۰ \Rightarrow \text{همواره برقرار} \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = \mathbb{R} \quad (۲) \end{cases}$$

$$(۱),(۲) \xrightarrow{\text{اشتراک}} ۰ < m < \frac{۵}{۲} \Rightarrow m \text{ دو مقدار صحیح ۱ و ۲ را می‌تواند اختیار کند}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۵۳**

$$x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y - k = ۰ \Rightarrow \begin{cases} O(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}) = (۱,۱) \\ R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴+۴k} = \sqrt{۲+k} \end{cases}$$

$$۲x^۲ + ۲y^۲ + ۸x + ۱۲y + ۲۴ = ۰ \Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۴x + ۶y + ۱۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} O'(-۲,-۳) \\ R' = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۳۶-۴۸} = ۱ \end{cases}$$

$$\text{شرط متداخل بودن} : OO' < |R - R'| \Rightarrow \sqrt{۹+۱۶} < |\sqrt{۲+k} - ۱|$$

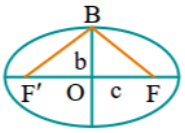
$$\Rightarrow ۵ < |\sqrt{۲+k} - ۱| \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{۲+k} - ۱ > ۵ \Rightarrow \sqrt{۲+k} > ۶ \\ \text{یا} \\ \sqrt{۲+k} - ۱ < -۵ \Rightarrow \sqrt{۲+k} < -۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲+k > ۳۶ \Rightarrow k > ۳۴ \\ \text{یا} \\ \sqrt{۲+k} < -۴ \Rightarrow \text{جواب ندارد.} \end{cases}$$

پس به ازای تمام مقادیر $k > ۳۴$ دو دایره متداخل هستند.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۵۴** ① گزینه ۱ صحیح است، زیرا طبق شکل $OF = c$ و $OB = b$ است و بنابراین طبق رابطهٔ فیثاغورس در مثلث OBF داریم:

$$BF^۲ = b^۲ + c^۲ = a^۲ \Rightarrow BF = a$$

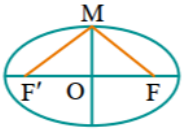



② گزینه ۲ صحیح است، زیرا داریم:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e^۲ = \frac{c^۲}{a^۲} = \frac{a^۲ - b^۲}{a^۲} = ۱ - \frac{b^۲}{a^۲} \Rightarrow e = \sqrt{۱ - \frac{b^۲}{a^۲}}$$

③ گزینه ۳ نادرست است، زیرا بیشترین مساحت مثلث $MFF'$ زمانی اتفاق می‌افتد که $M$ روی $B$ واقع شود و بنابراین خواهیم داشت:

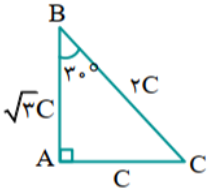
$$S_{\triangle MFF'} = \frac{۱}{۲} OM \times FF' = \frac{۱}{۲} \times b \times ۲c = bc$$




④ گزینه ۴ صحیح است، زیرا $e = \sqrt{۱ - \frac{b^۲}{a^۲}}$ و هر قدر $a$ و $b$ به هم نزدیک‌تر باشند، شکل بیضی به دایره نزدیک‌تر است و در این صورت $e$ به صفر نزدیک می‌شود.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۵۵** پس در مثلث ABC با توجه به آن‌که $\hat{B} = ۳۰^\circ$ داریم:




با توجه به فرض:

$$V = \frac{\pi}{۳} \frac{C^۲ \times ۳C^۲}{۲C} = \frac{\pi}{۲} C^۳$$

$$\frac{\pi}{۲} C^۳ = ۳۲\pi \Rightarrow C^۳ = ۶۴ \Rightarrow ۲C = ۸$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۵۶** چون دایره بر محور $x$ها در ناحیه اول مماس است. پس:

$$(x - \alpha)^۲ + (y - R)^۲ = R^۲$$

چون بر محور $x$ها در $A$ مماس است. پس:

$$(x - ۴\sqrt{۲})^۲ + (y - R)^۲ = R^۲$$

بر خط $y = x$ مماس است، پس قرار می‌دهیم $y = x$ و باید ریشه مضاعف داشته باشد.

$$x^۲ - ۸\sqrt{۲}x + ۳۲ + x^۲ - ۲Rx + R^۲ = R^۲ \Rightarrow x^۲ - (R + ۴\sqrt{۲})x + ۱۶ = ۰$$

$$R + ۴\sqrt{۲} = ۸ \Rightarrow R = ۸ - ۴\sqrt{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

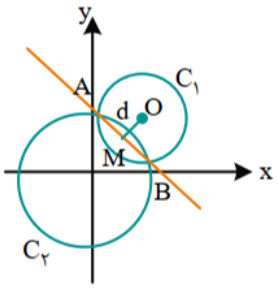
**۵۷** ابتدا دو دایره را تلاقی می‌دهیم تا وتر مشترک آن‌ها به دست آید.

$$x^۲+R^۲-۲Rx+y^۲+۴R^۲-۴yR-R^۲=x^۲+R^۲+۲xR+y^۲+۴R^۲+۴Ry-۲۵R^۲$$

$$\Rightarrow ۸Ry+۴xR=۲۴R^۲ \Rightarrow \text{وتر مشترک } ۲y+x=۶R$$

فاصله مرکز یکی از دو دایره را به دلخواه تا وتر مشترک پیدا می‌کنیم (مثلاً $C_۱$) و با داشتن شعاع دایره، اندازه AB را به دست می‌آوریم.

$$C_۱:\begin{cases}R=\text{شعاع} & ۲y+x-۶R=۰\\ O\begin{vmatrix}R\\ ۲R\end{vmatrix}\ \text{مرکز} & d=\dfrac{R}{\sqrt{۵}}\end{cases}$$




$$AM=\sqrt{R^۲-\frac{۱}{۵}R^۲}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}R$$

$$\text{وتر مشترک}=\frac{۴}{\sqrt{۵}}R \Rightarrow \frac{۴}{\sqrt{۵}}R=۴ \Rightarrow R=\sqrt{۵}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۵۸** چون AH ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه ABC است، پس:

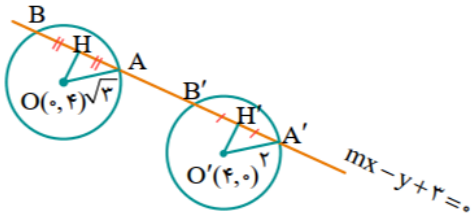
$$AH^۲=BH\times HC=۴\times ۹=۳۶ \Rightarrow AH=۶$$

بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ $A(a,۲)$ از خط $۳x-۴y-۱=۰$ برابر ۶ است، پس:

$$\frac{|۳a-۴\times ۲-۱|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=۶ \Rightarrow |۳a-۹|=۳۰ \Rightarrow |a-۳|=۱۰ \Rightarrow \begin{cases}a-۳=۱۰\\ a-۳=-۱۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=۱۳\\ a=-۷\end{cases}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۵۹** شعاع و مرکز دایره‌ها مطابق شکل مقابل هستند. بنابراین:




$$OH=\frac{|۰-۴+۳|}{\sqrt{m^۲+۱}}=\frac{۱}{\sqrt{m^۲+۱}},\ O'H'=\frac{|۴m+۳|}{\sqrt{m^۲+۱}}$$

$$AH^۲=OA^۲-OH^۲=۳-\frac{۱}{m^۲+۱},\ A'H'^۲=O'A'^۲-O'H'^۲=۴-\frac{(۴m+۳)^۲}{m^۲+۱}$$

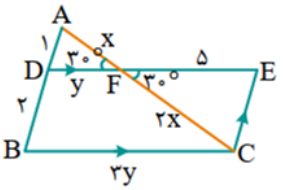
چون $AB=A'B'$ پس $AH=A'H'$ و در نتیجه:

$$AH^۲=A'H'^۲ \Rightarrow ۳-\frac{۱}{m^۲+۱}=۴-\frac{(۴m+۳)^۲}{m^۲+۱} \Rightarrow m^۲+۲=(۴m+۳)^۲ \Rightarrow ۱۵m^۲+۲۴m+۷=۰$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن m برابر $-\frac{۲۴}{۱۵}$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۶۰** توجه کنید که در مثلث ABC پاره‌خط DF موازی ضلع BC است، پس طبق قضیهٔ تالس و تعمیم آن داریم:




$$\frac{AD}{DB}=\frac{AF}{FC}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{x}{FC}\Rightarrow FC=۲x$$
$$\frac{AD}{AB}=\frac{DF}{BC}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{y}{BC}\Rightarrow BC=۳y$$

چون $DE=BC$، پس:

$$y+۵=۳y\Rightarrow y=\frac{۵}{۲}$$

چون مساحت مثلث ADF برابر ۲ است، پس:

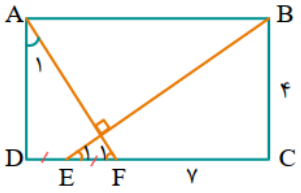
$$S_{\hat{ADF}}=\frac{۱}{۲}\times FA\times FD\times\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times x\times y\times\frac{۱}{۲}=\frac{xy}{۴}\Rightarrow\frac{xy}{۴}=۲\Rightarrow x=\frac{۸}{y}=\frac{۸}{\frac{۵}{۲}}=\frac{۱۶}{۵}$$

بنابراین محیط مثلث CEF برابر است با:

$$۵+۲+۲x=۷+۲(\frac{۱۶}{۵})=۱۳/۴$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۶۱** توجه کنید که:




$$\begin{cases}\hat{E}_۱+\hat{F}_۱=۹۰^\circ\\ \hat{F}_۱+\hat{A}_۱=۹۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\hat{A}_۱=\hat{E}_۱$$

پس مثلث‌های ADF و BCE بنابر حالت (زز) متشابهند، پس:

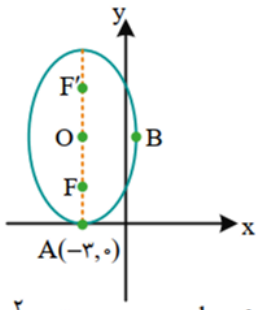
$$\frac{DF}{BC}=\frac{AD}{EC}\Rightarrow\frac{۲x}{۴}=\frac{۴}{۷+x}\Rightarrow ۷x+x^۲=۸\Rightarrow x^۲+۷x-۸=۰$$
$$\Rightarrow(x-۱)(x+۸)=۰\Rightarrow x=۱\ ,\ x=-۸\ \text{غ ق ق}$$

بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADF، بنابر قضیهٔ فیثاغورس:

$$AF^۲=AD^۲+DF^۲=۴^۲+۲^۲=۲۰\Rightarrow AF=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۶۲** بیضی موردنظر به صورت مقابل است. مختصات مرکز بیضی میانگین مختصات دو کانون است. $O(-۳,۵)$




خواهیم داشت:

$$a=OA=۵\ ,\ c=OF=۳$$

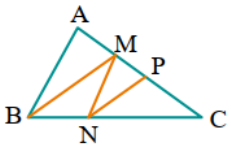
$$b^۲=a^۲-c^۲=۲۵-۹=۱۶\Rightarrow b=۴$$

بیشترین طول نقاط بیضی مربوط به رأس B می‌باشد.

$$x_B=x_O+b=-۳+۴=۱$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۶۳** می‌دانیم:




$$\left.\begin{array}{l}\frac{PC}{MP}=\frac{CN}{BN}\\ \frac{CN}{BN}=\frac{MC}{AM}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{PC}{MP}=\frac{MC}{AM}=۲$$

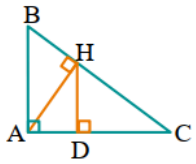
اگر $MP=x$ باشد، $PC=۲x$ و در نتیجه $MC=۳x$ و $AM=\frac{۳}{۲}x$ خواهد بود.

دو مثلث ABM و MNP متشابه هستند. نسبت تشابه آن‌ها برابر $\frac{AM}{MP}=\frac{۳}{۲}$ می‌باشد.

$$\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle MNP}}=\frac{۹}{۴}\Rightarrow \frac{S_{\triangle ABM}}{۸}=\frac{۹}{۴}\Rightarrow S_{\triangle ABM}=۱۸$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۶۴**




$$\triangle ABC: BC^۲=AB^۲+AC^۲=۹^۲+۱۲^۲=۲۲۵\Rightarrow BC=۱۵$$

$$AH\times BC=AB\times AC=۲S_{\triangle ABC}$$

$$\Rightarrow AH\times ۱۵=۹\times ۱۲\Rightarrow AH=\frac{۳۶}{۵}$$

$$\triangle ACH: AH^۲=AD\times AC\Rightarrow (\frac{۳۶}{۵})^۲=AD\times ۱۲\Rightarrow AD=\frac{۱۰۸}{۲۵}$$

بنابراین:

$$CD=AC-AD=۱۲-\frac{۱۰۸}{۲۵}=\frac{۱۹۲}{۲۵}=۷/۶۸$$

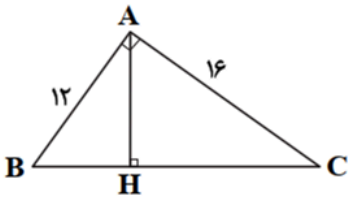
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۶۵** **نکته (قضیهٔ فیثاغورس): در مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر است.**

**ابتدا به کمک رابطهٔ فیثاغورس، ضلع BC را به‌دست می‌آوریم:**

$$BC^۲=۱۲^۲+۱۶^۲=۱۴۴+۲۵۶=۴۰۰\Rightarrow BC=۲۰$$

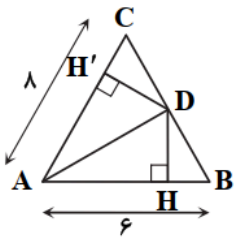
**حال مساحت مثلث را به دو روش محاسبه می‌کنیم:**




$$\left\{\begin{array}{l}S=\frac{۱}{۲}AB.AC=\frac{۱}{۲}(۱۲)(۱۶)=۹۶\\ S=\frac{۱}{۲}AH.BC=\frac{۱}{۲}AH(۲۰)=۱۰AH\end{array}\right.\Rightarrow ۱۰AH=۹۶\Rightarrow AH=۹/۶$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۶۶** نکته: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد روی نیمساز زاویه قرار دارد.




مجموع فواصل نقطهٔ D از اضلاع AC و AB یعنی مجموع طول عمودهایی که از D به AB و AC رسم می‌شود؛ یعنی حاصل $DH + DH'$ را باید بیابیم:

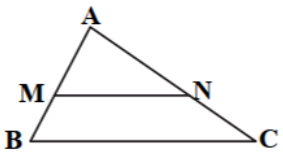
$$\hat{BAC}\text{ نیمساز }AD \xrightarrow{D\text{ روی نیمساز}} DH = DH'$$

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} \Rightarrow ۲۱ = \frac{۱}{۲} \times DH \times AB + \frac{۱}{۲} \times DH' \times AC$$

$$\Rightarrow ۲۱ = \frac{۱}{۲} \times DH \times ۶ + \frac{۱}{۲} \times DH' \times ۸ \xrightarrow{DH=DH'} ۲۱ = ۷\,DH \Rightarrow DH = ۳ \Rightarrow DH' = ۳ \Rightarrow DH + DH' = ۳ + ۳ = ۶$$

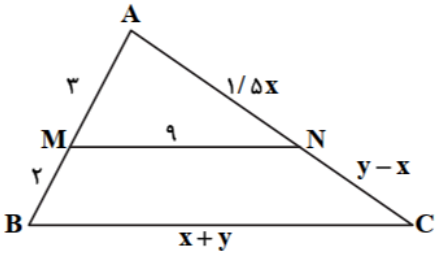
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۶۷** نکته (تعمیم قضیهٔ تالس): در مثلث ABC، اگر $MN \parallel BC$ داریم:




$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

طبق فرض $MN \parallel BC$، پس با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس داریم:




$$\begin{cases} \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۱/۵x}{y + ۰/۵x} \Rightarrow ۳y + ۱/۵x = ۷/۵x \Rightarrow ۳y = ۶x \Rightarrow y = ۲x \\ \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۹}{x+y} \Rightarrow x + y = ۱۵ \xrightarrow{y=۲x} ۳x = ۱۵ \Rightarrow x = ۵ \Rightarrow y = ۱۰ \end{cases}$$

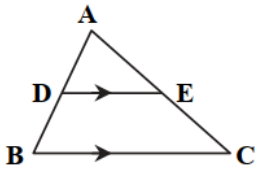
بنابراین: $۲x - y = ۰$

توجه کنید بدون به دست آوردن مقادیر x و y و با توجه به رابطهٔ $y = ۲x$ نیز می‌توانستیم تشخیص دهیم $۲x - y$ برابر با صفر است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۶۸** نکته: در متوازی الاضلاع، هر دو ضلع روبه‌رو با هم موازی و برابرند.

نکته: در شکل روبه‌رو اگر $DE \parallel BC$، آنگاه:

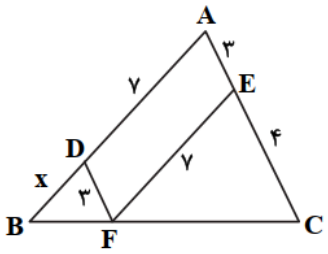



$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC} \quad , \quad \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

با توجه به متوازی‌الاضلاع بودن $AEFD$، پاره‌خط‌های $EF$ و $AD$ موازی و مساوی‌اند؛ یعنی:

$$EF = AD = ۷$$

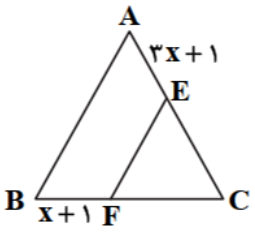
اکنون در مثلث $ABC$ داریم:




$$EF \parallel AB \Rightarrow \frac{CE}{AC}=\frac{EF}{AB} \Rightarrow \frac{۴}{۷}=\frac{۷}{۷+x} \Rightarrow ۲۸+۴x=۴۹ \Rightarrow ۴x=۲۱ \Rightarrow x=\frac{۲۱}{۴}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۶۹**




$$\overset{\triangle}{ABC} : EF \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{EC}{AE}=\frac{FC}{BF} \Rightarrow \frac{EC}{۳x+۱}=\frac{FC}{x+۱}$$

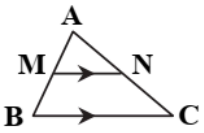
چون در صورت سؤال نسبت $\frac{EC}{FC}$ داده‌شده است، کافی است جای وسطین را در تناسب بـه دست آمده عوض کنیم:

$$\frac{EC}{۳x+۱}=\frac{FC}{x+۱} \Rightarrow \frac{EC}{FC}=\frac{۳x+۱}{x+۱} \Rightarrow \frac{۵}{۳}=\frac{۳x+۱}{x+۱} \Rightarrow ۳(۳x+۱)=۵(x+۱)$$

$$\Rightarrow ۹x+۳=۵x+۵ \Rightarrow ۴x=۲ \Rightarrow x=\frac{۲}{۴}=۰/۵$$

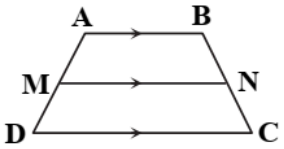
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۰ نکته (تعمیم قضیهٔ تالس): در مثلث $ABC$، اگر $MN \parallel BC$، آنگاه:



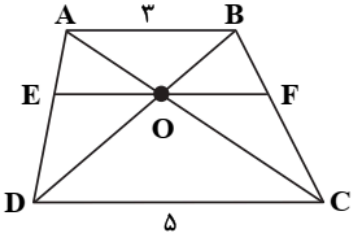

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

نکته (قضیهٔ تالس در ذوزنقه): در ذوزنقهٔ $ABCD$، اگر $MN \parallel AB$، آنگاه:




$$\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$$

طبق فرض $EF \parallel AB$، با استفاده از قضیهٔ تالس در ذوزنقه داریم:




$$\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$$

حال با استفاده از ترکیب در مخرج، نتیجه می‌شود:

$$\frac{AE}{AD}=\frac{BF}{BC}$$

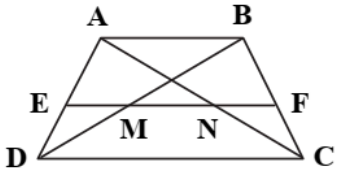
اکنون با استفاده از قضیهٔ تالس در مثلث‌های $ADC$ و $BCD$ داریم:

$$\begin{cases} \overset{\triangle}{ADC}: OE \parallel DC \Rightarrow \dfrac{OE}{DC}=\dfrac{AE}{AD} & (۱) \\ \overset{\triangle}{BCD}: OF \parallel DC \Rightarrow \dfrac{OF}{DC}=\dfrac{BF}{BC} & (۲) \end{cases}$$

حال با توجه به اینکه $\frac{AE}{AD}=\frac{BF}{BC}$، از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{OE}{DC}=\frac{OF}{DC} \Rightarrow OE=OF \Rightarrow \frac{OE}{OF}=۱$$

تذکر: در ذوزنقهٔ شکل روبه‌رو اگر $EF \parallel AB$، آنگاه:




$$EM=NF$$

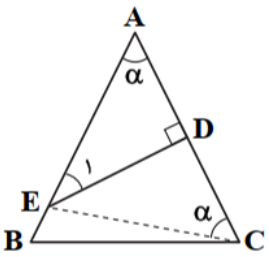
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۷۱** نکته: هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و برعکس.

ابتدا شکل سؤال را رسم می‌کنیم.

وقتی از وسط AC عمودی رسم می‌کنیم، در واقع DE عمودمنصف AC است.

بنابراین:




$$\overset{\triangle}{EAC}\ \text{متساوی‌الساقین} \Rightarrow EA=EC \Rightarrow E\ \text{روی عمودمنصف}\ AC$$

$$\Rightarrow \hat{A}=A\hat{C}E=\alpha \xrightarrow[B\hat{C}E=18^\circ]{\hat{B}=\hat{C}} \hat{B}=\hat{C}=\alpha+18^\circ$$

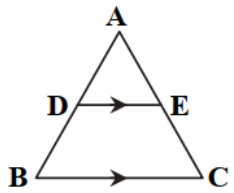
$$\overset{\triangle}{ABC}: \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow \alpha+2(\alpha+18^\circ)=180^\circ \Rightarrow 3\alpha+36^\circ=180^\circ \Rightarrow 3\alpha=144^\circ \Rightarrow \alpha=48^\circ$$

اکنون داریم:

$$\overset{\triangle}{AED}: \hat{A}+\hat{E}_1=90^\circ \xrightarrow[\alpha=48^\circ]{\hat{A}=\alpha} \hat{E}_1=42^\circ$$

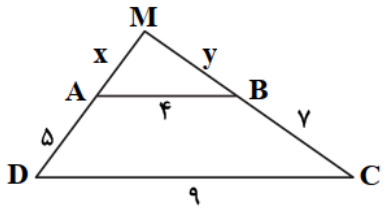
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۷۲** نکته (تعمیم قضیهٔ تالس): اگر در مثلث ABC، $DE \parallel BC$، آنگاه:




$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

با توجه به شکل و نکته، داریم:

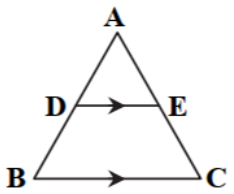



$$\frac{x}{x+5}=\frac{y}{y+7}=\frac{4}{9} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=\frac{28}{5}=5/6 \end{cases} \Rightarrow x+y=9/6$$

$$\overset{\triangle}{MCD}\ \text{محیط مثلث}=x+y+5+7+9=9/6+21=30/6$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۷۳** نکته (تعمیم قضیهٔ تالس): اگر در مثلث ABC، $DE \parallel BC$، آنگاه:




$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

با توجه به نکتهٔ بالا داریم:

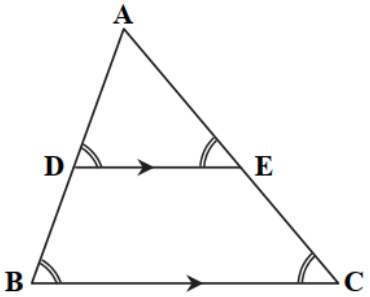
$$AD \parallel BN \Rightarrow \frac{AD}{BN}=\frac{CD}{BC} \Rightarrow \frac{1}{BN}=\frac{CD}{AD\cdot BC}$$

$$AD \parallel MC \Rightarrow \frac{AD}{MC}=\frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{1}{MC}=\frac{BD}{AD\cdot BC}$$

$$\frac{1}{BN}+\frac{1}{MC}=\frac{CD}{AD\cdot BC}+\frac{BD}{AD\cdot BC}=\frac{BC}{AD\cdot BC}=\frac{1}{AD}=\frac{1}{6}$$

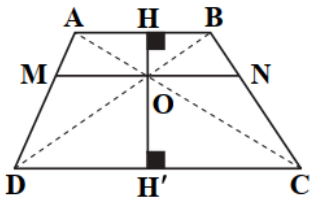
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۴ نکته (قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها): اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند در این صورت مثلث کوچکی که به وجود می‌آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.




نکته: در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع وارد بر اضلاع متناظر با نسبت تشابه برابر است.

پاره‌خط MN را موازی قاعده‌ها رسم می‌کنیم. بنابراین داریم:




$$AB \parallel DC \Rightarrow \overset{\triangle}{OAB} \sim \overset{\triangle}{OCD} \Rightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{DC} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

پس نسبت ارتفاع دو مثلث برابر $\frac{OH}{OH'} = \frac{۱}{۲}$ است.

از طرفی:

$$\frac{AO}{OC} = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AO}{AC} = \frac{۱}{۳} \;,\; \frac{OB}{OD} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{OB}{BD} = \frac{۱}{۳}$$

حالا کافی است قاعدهٔ MN را به‌دست آوریم:

$$\overset{\triangle}{ACD} : MO \parallel DC \Rightarrow \frac{MO}{DC} = \frac{AO}{AC} \Rightarrow \frac{MO}{۶} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow MO = ۲$$

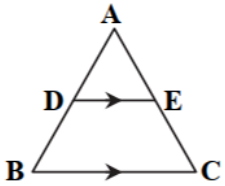
$$\overset{\triangle}{BCD} : NO \parallel DC \Rightarrow \frac{ON}{DC} = \frac{BO}{BD} \Rightarrow \frac{ON}{۶} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow ON = ۲ \qquad MN = MO + ON = ۴$$

بنابراین:

$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}} = \frac{\frac{۱}{۲}OH(AB+MN)}{\frac{۱}{۲}OH'(MN+DC)} = \frac{۱}{۲} \times \frac{(۳+۴)}{(۴+۶)} = \frac{۷}{۲۰} = ۰/۳۵$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

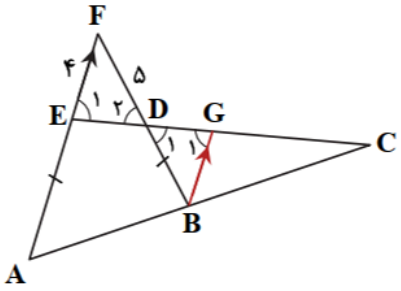
**۷۵** نکته (تعمیم قضیهٔ تالس): اگر در مثلث $ABC$، $DE \parallel BC$، آنگاه:




$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

نکته: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

از نقطهٔ $B$، پاره‌خط $BG$ را موازی $AF$ رسم می‌کنیم و داریم:



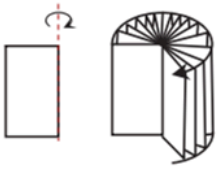

$$\begin{cases}\hat{D}_1=\hat{D}_2 \xrightarrow{(zz)} \overset{\triangle}{EFD}\sim\overset{\triangle}{DGB}\\ E_1=G_1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{BG}=\frac{FD}{DB}\Rightarrow\frac{۴}{BG}=\frac{۵}{BD}\Rightarrow\frac{BD}{BG}=\frac{۵}{۴}\quad (۱)$$

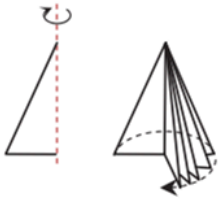
$$\begin{cases}\overset{\triangle}{AEC}: GB\parallel AE \Rightarrow \frac{AC}{BC}=\frac{AE}{BG}\Rightarrow\frac{AC}{BC}=\frac{۵}{۴}\\ AE=BD \xrightarrow{(۱)} \frac{AE}{BG}=\frac{۵}{۴}\end{cases}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۷۶**

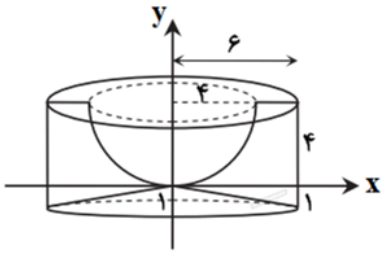


نکته: شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول یا عرض آن، یک استوانه است.



نکته: شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه، حول یکی از اضلاع قائمهٔ آن، یک مخروط است.

مطابق شکل برای محاسبهٔ حجم قسمت رنگ‌شده، باید از حجم استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۶ و ارتفاع ۵ واحد، حجم یک نیم‌کره به شعاع ۴ و حجم یک مخروط به شعاع قاعدهٔ ۶ و ارتفاع ۱ واحد را کم کنیم:




$$V_1=V_{\text{استوانه}}=\pi r^2 h=\pi(۶)^2(۵)=۱۸۰\pi$$

$$V_2=V_{\text{نیمکره}}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳}\pi r^3=\frac{۲}{۳}\pi(۴)^3=\frac{۱۲۸\pi}{۳}$$

$$V_3=V_{\text{مخروط}}=\frac{۱}{۳}\pi r^2 h=\frac{۱}{۳}\pi(۶)^2(۱)=۱۲\pi$$

$$V_{\text{قسمت رنگی}}=V_1-(V_2+V_3)=۱۸۰\pi-(\frac{۱۲۸\pi}{۳}+۱۲\pi)=\frac{۳۷۶\pi}{۳}$$

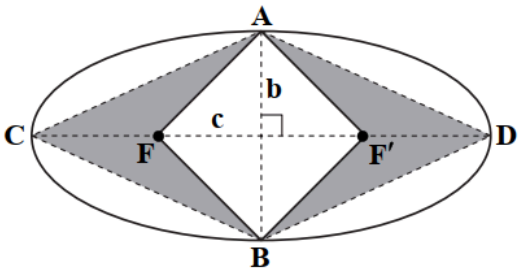
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۷ نکته: مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامند و معمولاً آن را با حرف e نمایش می‌دهند.

با توجه به شکل: $CD = ۲a \ , \ AB = ۲b \ , \ FF' = ۲c$

چهارضلعی‌های ACBD و AFBF′ لوزی هستند. (زیرا قطرها عمودمنصف هم هستند.)

می‌دانیم مساحت لوزی برابر با نصف حاصل‌ضرب دو قطر است. بنابراین:




$$S_{ACBD} = \frac{۱}{۲} \times CD \times AB = \frac{۱}{۲} \times ۲a \times ۲b = ۲ab$$

$$S_{AFBF'} = \frac{۱}{۲} FF' \times AB = \frac{۱}{۲} \times ۲c \times ۲b = ۲bc \quad (۱)$$

$$S_{\text{هاشورخورده}} = S_{ACBD} - S_{AFBF'} \Rightarrow ۶\sqrt{۳} = ۲ab - ۲bc$$

$$\Rightarrow ۶\sqrt{۳} = ۲b(a-c) \quad (*)$$

از طرفی خروج از مرکز بیضی $\frac{۱}{۲}$ است، پس:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = ۲c \xrightarrow{(*)} ۶\sqrt{۳} = ۲b(۲c-c) \Rightarrow ۶\sqrt{۳} = ۲bc \overset{(۱)}{=} S_{AFBF'}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

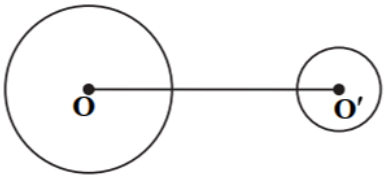
۷۸ نکته: رابطهٔ $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲$ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع $r$ در صفحهٔ مختصات است که به آن «معادلهٔ استاندارد دایره» می‌گوییم.

نکته: اگر $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ معادلهٔ گستردهٔ یک دایره باشد، مختصات مرکز این دایره $O(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲})$ است. شعاع این دایره برابر است با:

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}.$$

نکته: پاره‌خطی که مرکزهای دو دایره را به‌هم وصل می‌کند، «خط‌المرکزین» نامیده می‌شود.

اگر $OO'>r+r'$، دو دایره متخارج هستند.




ابتدا مرکز و شعاع دایره‌ها را به‌دست می‌آوریم:

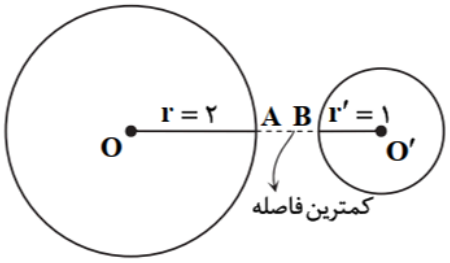
$$C:x^۲+y^۲+۴x-۲y+۱=۰ \Rightarrow O(-۲,۱)\ ,\ r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۴-۴}=۲ \qquad C':(x-۳)^۲+(y-۶)^۲=۱ \Rightarrow O'(۳,۶)\ ,\ r'=۱$$

اکنون وضعیت دو دایره را نسبت به‌هم مشخص می‌کنیم:

$$OO'=\sqrt{(-۲-۳)^۲+(۱-۶)^۲}=\sqrt{۲۵+۲۵}=۵\sqrt{۲}$$

$r+r'=۳ \Rightarrow OO'>r+r' \Rightarrow$ دو دایره متخارج (بیرون هم) هستند.

حال با توجه به شکل، کمترین فاصلهٔ دو دایره را محاسبه می‌کنیم:




$$\text{کمترین فاصلهٔ دو دایره} = AB = OO'-(r+r')=۵\sqrt{۲}-۳$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۹ نکته: خط مماس در نقطهٔ تماس با دایره، بر شعاع آن دایره عمود است.

نکته: فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0, y_0)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=0$ برابر است با:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

نکته: رابطهٔ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع $r$ در صفحهٔ مختصات است که به آن «معادلهٔ استاندارد دایره» می‌گوییم.

محل برخورد دو قطر داده شده همان مرکز دایره است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 2x-y=3 \\ 3x+y=7 \end{cases} \xrightarrow{+} 5x=10 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=1 \Rightarrow O(2,1)$$

خط $3x-4y+8=0$ بر دایره به مرکز $O(2,1)$ مماس است. پس فاصلهٔ $O$ تا این خط همان طول شعاع دایره است:

$$r=\frac{|3(2)-4(1)+8|}{\sqrt{9+16}}=\frac{10}{5}=2$$

اکنون با داشتن شعاع و مرکز، معادلهٔ دایره را می‌نویسیم:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=2^2 \Rightarrow x^2-4x+4+y^2-2y+1=4 \Rightarrow x^2+y^2-4x-2y+1=0$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۰ نکته: اگر $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ معادلهٔ گستردهٔ یک دایره باشد، مختصات مرکز این دایره $O(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲})$ است. شعاع این دایره برابر است با: $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$

نکته: مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامند و معمولاً آن را با حرف $e$ نمایش می‌دهند.

مختصات مرکز و طول شعاع دایرهٔ $C$ را به‌دست می‌آوریم:

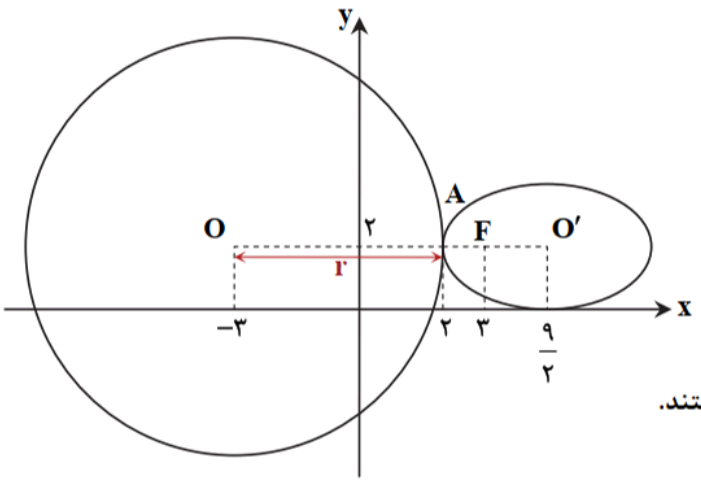
$$C: x^۲+y^۲+۶x-۴y-۱۲=۰ \Rightarrow O(-۳,۲)\ ,\ r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶+۱۶-۴(-۱۲)}=۵$$

با توجه به مختصات کانون‌های بیضی، یک بیضی افقی داریم. بنابراین:

$$F(۳,۲)\ ,\ F'(۶,۲) \Rightarrow ۲c=۶-۳=۳ \Rightarrow c=\frac{۳}{۲}\ ,\ \text{مرکز بیضی}: O'(\frac{۹}{۲},۲)$$

$$e=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{۳}{۵}=\frac{\frac{۳}{۲}}{a} \Rightarrow a=\frac{۵}{۲}\ ,\ a-c=۱$$

حال اگر دایره و بیضی را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم:

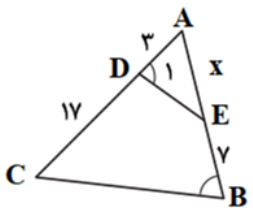



مشاهده می‌شود که دایره و بیضی در نقطهٔ $A(۲,۲)$ برهم مماس هستند.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۱ نکته: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آنگاه این دو مثلث متشابه‌اند.

در دو مثلث $ABC$ و $ADE$ داریم:




$$\begin{cases}\hat{A}\ \text{مشترک} \\ \hat{B}=\hat{D}_۱\end{cases} \xrightarrow{(zz)} \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{AED}$$

اکنون نسبت اضلاع متناظر را می‌نویسیم:

$$\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC} \quad (I)$$

با توجه به تناسب $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$، داریم:

$$\frac{x}{۲۰}=\frac{۳}{x+۷} \Rightarrow x(x+۷)=۶۰ \Rightarrow x^۲+۷x-۶۰=۰ \Rightarrow (x+۱۲)(x-۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=-۱۲ & \times \\ x=۵ & \checkmark\end{cases}$$

$$ABC\ \text{محیط مثلث}=۶۰ \Rightarrow ۲۰+۱۲+BC=۶۰ \Rightarrow BC=۲۸$$

$$(I) \Rightarrow \frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{x}{۲۰}=\frac{DE}{۲۸} \xrightarrow{x=۵} \frac{۵}{۲۰}=\frac{DE}{۲۸} \Rightarrow DE=۷$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

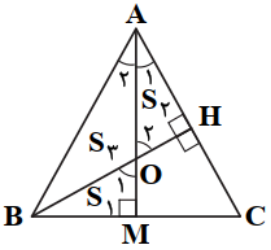
**۸۲** نکته: اگر نسبت تشابه دو مثلث متشابه برابر $k$ باشد، نسبت مساحت این دو مثلث برابر $k^۲$ می‌باشد.

نکته: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند آن دو مثلث متشابه‌اند.

یادآوری: در مثلث متساوی‌الساقین، میانه وارد بر قاعده، ارتفاع وارد بر آن و نیمساز زاویهٔ رأس نیز می‌باشد.

$$OA=\frac{۵}{۳}OB \Rightarrow ۳OA=۵OB \Rightarrow \frac{OB}{OA}=\frac{۳}{۵} \qquad OA=\frac{۵}{۷}AB \Rightarrow ۷OA=۵AB \Rightarrow \frac{OA}{AB}=\frac{۵}{۷}$$

اگر $S_{\triangle BOM}=S_۱$، $S_{\triangle AOH}=S_۲$ و $S_{\triangle ABO}=S_۳$ باشد، داریم:




$$\begin{cases}\hat{O}_۱=\hat{O}_۲\\ \hat{M}=\hat{H}=۹۰\end{cases} \Rightarrow BOM \sim AOH \xrightarrow{(zz)} \text{نسبت تشابه}=\frac{BO}{AO}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{S_۱}{S_۲}=(\frac{۳}{۵})^۲=\frac{۹}{۲۵} \quad (I)$$

دو مثلث AOH و ABM نیز متشابه‌اند. زیرا:

$$\begin{cases}\hat{H}=\hat{M}=۹۰\\ \hat{A}_۱=\hat{A}_۲\end{cases} \Rightarrow AOH \sim ABM \xrightarrow{(zz)} \text{نسبت تشابه}=\frac{AO}{AB}=\frac{۵}{۷} \Rightarrow \frac{S_{\triangle AOH}}{S_{\triangle ABM}}=(\frac{۵}{۷})^۲=\frac{۲۵}{۴۹}$$

بنابراین:

$$\frac{S_۲}{S_۱+S_۳}=\frac{۲۵}{۴۹} \Rightarrow \frac{S_۱+S_۳}{S_۲}=\frac{۴۹}{۲۵} \Rightarrow \frac{S_۱}{S_۲}+\frac{S_۳}{S_۲}=\frac{۴۹}{۲۵} \Rightarrow \frac{S_۳}{S_۲}=\frac{۴۹}{۲۵}-\frac{S_۱}{S_۲}$$

اکنون با توجه به رابطهٔ (I) داریم:

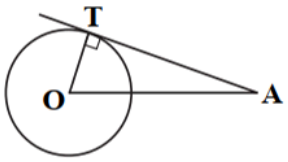
$$\frac{S_۳}{S_۲}=\frac{۴۹}{۲۵}-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۴۰}{۲۵}=\frac{۸}{۵}=۱/۶$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۸۳** راه‌حل اول:

نکته: رابطهٔ $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲$ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع $r$ در صفحهٔ مختصات است که به آن معادلهٔ استاندارد دایره می‌گوییم.

ابتدا مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به‌دست می‌آوریم:




$$x^۲+y^۲-۶x+۵y=۰ \Rightarrow (x-۳)^۲+(y+\frac{۵}{۲})^۲=۹+\frac{۲۵}{۴}=\frac{۶۱}{۴}$$

بنابراین مرکز دایره $O(۳,-\frac{۵}{۲})$ و شعاع دایره برابر با $\frac{\sqrt{۶۱}}{۲}$ است.

می‌دانیم خط مماس AT بر شعاع دایره عمود است، پس طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$AO^۲=OT^۲+AT^۲ \Rightarrow (\sqrt{(۱-۳)^۲+(۲+\frac{۵}{۲})^۲})^۲=(\frac{\sqrt{۶۱}}{۲})^۲+AT^۲$$

$$\Rightarrow AT^۲=۴+\frac{۸۱}{۴}-\frac{۶۱}{۴} \Rightarrow AT^۲=\frac{۱۶+۸۱-۶۱}{۴} \Rightarrow AT^۲=\frac{۳۶}{۴}=۹ \Rightarrow AT=۳$$

راه‌حل دوم:

نکته: اگر معادلهٔ دایره $f(x,y)=۰$ باشد و از نقطهٔ $A(x_A,y_A)$ خارج دایره، بر آن مماس رسم کنیم، طول خط مماس AT برابر است با:

$$AT=\sqrt{f(x_A,y_A)}$$

با توجه به نکته داریم:

$$AT=\sqrt{۱^۲+۲^۲-۶\times۱+۵\times۲}=\sqrt{۱+۴-۶+۱۰}=\sqrt{۹}=۳$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

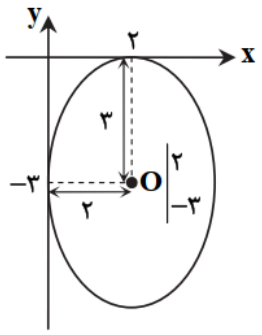
**۸۴** نکته: در بیضی به قطر بزرگ $۲a$، قطر کوچک $۲b$ و فاصلهٔ کانونی $۲c$ داریم: $a^۲ = b^۲ + c^۲$

با توجه به شکل مقابل، مشخص است که بیضی قائم بوده و $a = ۳$ و $b = ۲$ است، پس داریم:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۹ = ۴ + c^۲$$
$$\Rightarrow c^۲ = ۵ \Rightarrow c = \sqrt{۵}$$

کانون‌های بیضی به‌صورت زیر هستند:

$$F(۲, -۳ + \sqrt{۵}) \ , \ F'(۲, -۳ - \sqrt{۵})$$



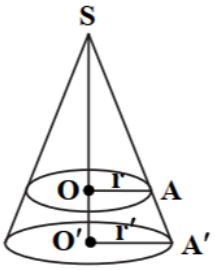

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۸۵** سطح مقطع حاصل یک دایره است که با استفاده از تالس داریم:

$$r' = ۴ \ , \ SO' = ۸ \ , \ OO' = ۲$$
$$\frac{SO}{SO'} = \frac{OA}{O'A'} \Rightarrow \frac{SO' - OO'}{SO'} = \frac{OA}{O'A'}$$
$$\Rightarrow \frac{۸ - ۲}{۸} = \frac{r}{r'} \Rightarrow \frac{۶}{۸} = \frac{r}{۴} \Rightarrow r = \frac{۲۴}{۸} = ۳$$

مساحت سطح مقطع حاصل برابر است با:

$$S = \pi r^۲ = \pi \times ۳^۲ = ۹\pi$$




(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۸۶** نکته: در بیضی با قطر بزرگ $۲a$، قطر کوچک $۲b$ و فاصلهٔ کانونی $۲c$ داریم:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲$$

نکته: معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع $R$، به‌صورت زیر است:

$$(x - \alpha)^۲ + (y - \beta)^۲ = R^۲$$

با توجه به شکل روبه‌رو و اطلاعات سؤال، باید کانون‌های بیضی را بیابیم:

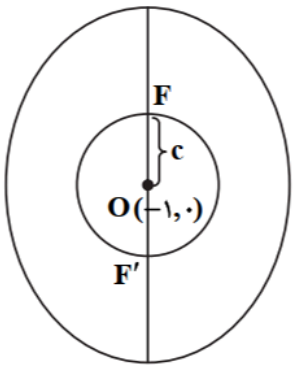
$$۲a = ۸ \Rightarrow a = ۴ \ , \ ۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳$$
$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow c^۲ = ۱۶ - ۹ = ۷ \Rightarrow c = \sqrt{۷}$$

حال معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(-۱, ۰)$ و شعاع $r = c = \sqrt{۷}$ را می‌نویسیم:

$$(x + ۱)^۲ + y^۲ = (\sqrt{۷})^۲ = ۷$$

محل برخورد دایره با محور $x$ها را می‌یابیم:

$$y = ۰ \Rightarrow (x + ۱)^۲ = ۷ \Rightarrow x + ۱ = \pm\sqrt{۷} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{۷} - ۱ > ۰ \\ x = -\sqrt{۷} - ۱ < ۰ \end{cases}$$




(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

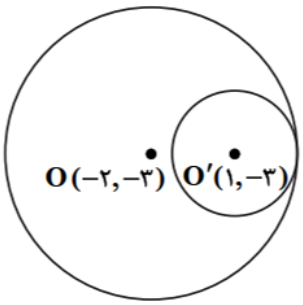
۸۷ نکته: اگر $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ معادلهٔ گستردهٔ یک دایره باشد، مختصات مرکز این دایره $O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$ است. شعاع این دایره برابر است با:

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$$

مرکز و شعاع دایرهٔ $x^۲+y^۲+۴x+۶y-۳=۰$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{مرکز دایره: } O(-۲,-۳)\ ,\ r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۳۶-۴(-۳)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۵۲+۱۲}\Rightarrow r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴}=\frac{۱}{۲}\times ۸=۴$$

طبق شکل مقابل، طول خط‌المرکزین دو دایره را به‌دست می‌آوریم:




$$OO'=\sqrt{(-۲-۱)^۲+(-۳+۳)^۲}=\sqrt{۹+۰}=۳$$

اگر شعاع دایرهٔ کوچک‌تر را $r'$ در نظر بگیریم، داریم:

$$OO'=r-r'\Rightarrow ۳=۴-r'\Rightarrow r'=۱$$

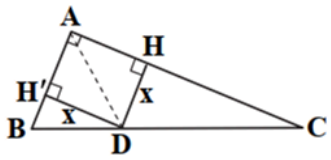
حال معادلهٔ دایرهٔ کوچک‌تر را می‌نویسیم:

$$(x-۱)^۲+(y+۳)^۲=۱^۲=۱\Rightarrow x^۲-۲x+۱+y^۲+۶y+۹=۱\Rightarrow x^۲+y^۲-۲x+۶y+۹=۰$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۸ نکته: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

طبق فرض، D روی نیمساز زاویهٔ A است، پس $DH=DH'$ و داریم:




$$S_{ABC}=S_{ADC}+S_{ADB}\Rightarrow \frac{۱}{۲}(۵)(۱۲)=\frac{۱}{۲}(۵)(x)+\frac{۱}{۲}(۱۲)(x)$$

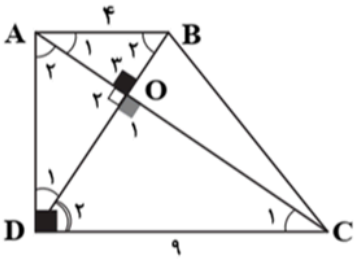
$$\Rightarrow ۶۰=۱۷x\Rightarrow x=\frac{۶۰}{۱۷}\Rightarrow DH=\frac{۶۰}{۱۷}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۹ راه‌حل اول:

نکته: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

ابتدا شکل مسئله را رسم می‌کنیم:




$$\begin{cases}\hat{O}=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{C}_۱+\hat{D}_۲=۹۰^\circ \\ \hat{D}=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{C}_۱+\hat{A}_۲=۹۰^\circ\end{cases} \Rightarrow \hat{A}_۲=\hat{D}_۲ \Rightarrow \hat{D}_۱=\hat{C}_۱$$

دو مثلث ADO و ODC متشابه‌اند؛ زیرا:

$$\begin{cases}\hat{A}_۲=\hat{D}_۲ \\ \hat{O}_۱=\hat{O}_۲=۹۰^\circ\end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ADO} \sim \overset{\triangle}{DOC} \Rightarrow \frac{AD}{DC}=\frac{AO}{OD} \quad (I)$$

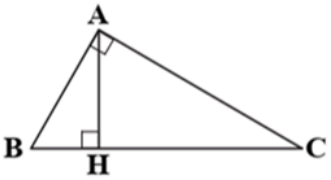
دو مثلث ADO و AOB نیز متشابه‌اند؛ زیرا به طریق مشابه داریم:

$$\begin{cases}\hat{B}_۲=\hat{A}_۲ \\ \hat{O}_۲=\hat{O}_۳=۹۰^\circ\end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ADO} \sim \overset{\triangle}{AOB} \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{OD}{AO} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{AB}{AD}=\frac{AO}{OD} \quad (II)$$

$$(I)\,,\,(II) \Rightarrow \frac{AB}{AD}=\frac{AD}{DC} \Rightarrow AD^۲=AB\cdot DC \Rightarrow AD^۲=۳۶ \Rightarrow AD=۶$$

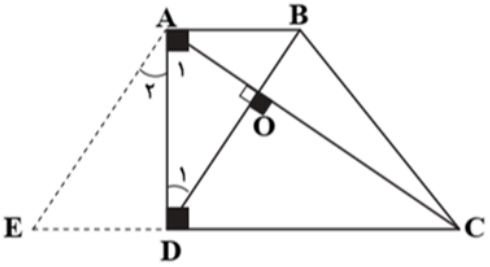
راه‌حل دوم:

نکته: اگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که $\hat{A}=۹۰$ است، AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، داریم:




$$AH^۲=BH\times CH$$
$$AB^۲=BH\times BC$$
$$AC^۲=CH\times BC$$

از A خطی موازی BD رسم می‌کنیم تا امتداد DC را در E قطع کند:




چهار ضلعی ABDE متوازی‌الاضلاع است. $AB\parallel ED\ ,\ AE\parallel BD \Rightarrow$

$$\Rightarrow AB=ED$$

از طرفی داریم:

$$\hat{O}=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱+\hat{D}_۱=۹۰^\circ \xrightarrow{\hat{D}_۱=\hat{A}_۲} \hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۹۰^\circ$$

پس مثلث AEC در رأس A قائمه است و AD ارتفاع وارد بر وتر است:

$$AD^۲=ED\times DC \Rightarrow AD^۲=AB\times DC \Rightarrow AD^۲=۳۶ \Rightarrow AD=۶$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۹۰** نکته: اگر در یک بیضی، اندازهٔ نیم‌قطر بزرگ را $a$، اندازهٔ نیم‌قطر کوچک را $b$ و نصف فاصلهٔ کانونی بیضی را $c$ بنامیم، آنگاه $a^۲ = b^۲ + c^۲$.

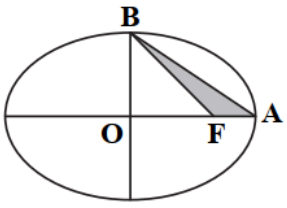
نکته: در بیضی، $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌گویند و معمولاً با $e$ نمایش می‌دهند.

با استفاده از نکات فوق داریم:

$$\frac{c}{a} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow a = ۳c \ , \ ۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow (۳c)^۲ = ۹ + c^۲ \Rightarrow ۹c^۲ - c^۲ = ۹ \Rightarrow ۸c^۲ = ۹ \Rightarrow c^۲ = \frac{۹}{۸} \Rightarrow c = \frac{۳}{۲\sqrt{۲}} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۴} \xrightarrow{a=۳c} a = \frac{۹\sqrt{۲}}{۴}$$

با توجه به شکل مقابل داریم:

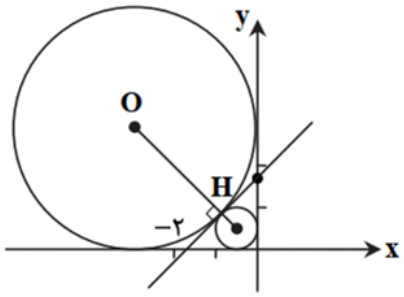



$$AF = a - c = \frac{۹\sqrt{۲}}{۴} - \frac{۳\sqrt{۲}}{۴} = \frac{۶\sqrt{۲}}{۴} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

$$S_{\triangle ABF} = \frac{۱}{۲} OB \cdot AF = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times \frac{۳\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۹\sqrt{۲}}{۴}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۹۱** اگر شعاع دایره برابر $r$ باشد و در ناحیهٔ دوم بر هر دو محور مختصات مماس باشد، مختصات مرکز به‌صورت $O(-r,r)$ است. چون دایره بر خط $۳x - ۴y + ۶ = ۰$ مماس است، داریم:

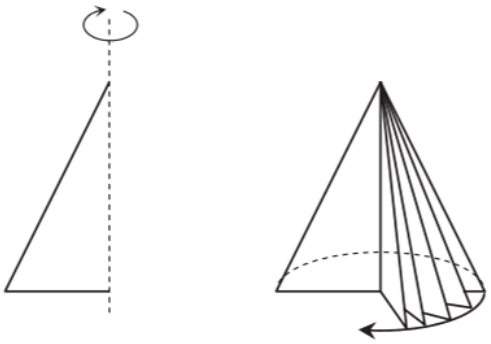



$$OH = r \Rightarrow \frac{|۳(-r) - ۴r + ۶|}{\sqrt{۹ + ۱۶}} = r \Rightarrow \frac{|-۷r + ۶|}{\sqrt{۲۵}} = r$$

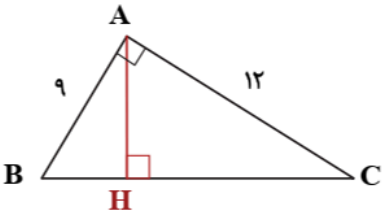
$$\Rightarrow |۷r - ۶| = ۵r \xrightarrow{r>۰} ۷r - ۶ = \pm ۵r \Rightarrow \begin{cases} ۷r - ۶ = ۵r \Rightarrow r = ۳ \\ ۷r - ۶ = -۵r \Rightarrow r = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۲



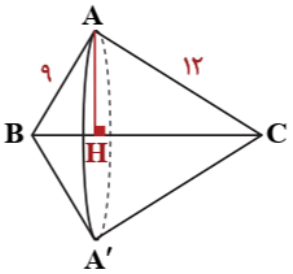
با توجه به شکل، ابتدا طول وتر و ارتفاع AH را به‌دست می‌آوریم:




$$AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \Rightarrow ۸۱ + ۱۴۴ = BC^۲ \Rightarrow BC = ۱۵$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{۱}{۲} \times AB \times AC = \frac{۱}{۲} \times AH \times BC \Rightarrow AH = \frac{۹ \times ۱۲}{۱۵} = \frac{۳۶}{۵}$$

از دوران این مثلث حول ضلع BC دو مخروط به‌هم چسبیده پدید می‌آید، پس مجموع حجم این دو مخروط را به‌دست می‌آوریم. حجم مخروط بزرگ‌تر را $V_۱$ و حجم مخروط کوچک‌تر را $V_۲$ در نظر می‌گیریم:




$$V_{\text{مخروط}} = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h \Rightarrow \begin{cases} V_۱ = \frac{۱}{۳}\pi (AH)^۲ (CH) \\ V_۲ = \frac{۱}{۳}\pi (AH)^۲ (BH) \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{\text{کل}} = V_۱ + V_۲ = \frac{۱}{۳}\pi (AH)^۲ (\underbrace{CH + BH}_{BC})$$

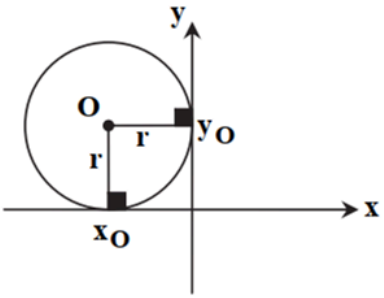
$$= \frac{۱}{۳}\pi \times (\frac{۳۶}{۵})^۲ \times ۱۵ = \frac{۳۶^۲ \times \pi}{۵} = \frac{۱۲۹۶\pi}{۵}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۹۳** نکته: رابطهٔ $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲$ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع $r$ در صفحهٔ مختصات است که به آن معادلهٔ استاندارد دایره می‌گوییم.

دایرهٔ $C$ بر محورهای مختصات مماس است و از نقطهٔ $(-۴,۲)$ عبور می‌کند، پس این دایره در ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات قراردارد.

بنابراین با توجه به شکل، مختصات مرکز آن به‌صورت $O(-r,r)$ است.




اکنون معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(-r,r)$ و شعاع $r$ را می‌نویسیم:

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲ \Rightarrow (x+r)^۲+(y-r)^۲=r^۲$$

حال مختصات نقطهٔ $(-۴,۲)$ را در معادلهٔ دایره قرار می‌دهیم:

$$(-۴+r)^۲+(۲-r)^۲=r^۲ \Rightarrow ۱۶-۸r+r^۲+۴-۴r+r^۲=r^۲$$

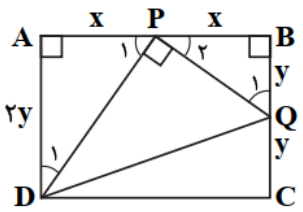
$$\Rightarrow r^۲-۱۲r+۲۰=۰ \Rightarrow (r-۲)(r-۱۰)=۰ \Rightarrow \begin{cases} r=۲ & \checkmark \\ r=۱۰ & \checkmark \end{cases}$$

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۹۴** نکته: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

دو مثلث $APD$ و $PBQ$ را در نظر می‌گیریم:




$$\begin{cases} \hat{P}_۱+\hat{D}_۱=۹۰^\circ \\ \hat{P}_۱+\hat{P}_۲=۹۰ \end{cases} \Rightarrow \hat{D}_۱=\hat{P}_۲$$

دو مثلث $APD$ و $PBQ$ متشابه‌اند؛ زیرا:

$$\begin{cases} \hat{D}_۱=\hat{P}_۲ \\ \hat{A}=\hat{B}=۹۰ \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{APD} \sim \overset{\triangle}{PBQ} \Rightarrow \frac{AP}{BQ}=\frac{AD}{BP} \quad (I)$$

اگر طول مستطیل $۲x$ و عرض آن $۲y$ باشد، داریم:

$$(I) \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{۲y}{x} \Rightarrow x^۲=۲y^۲$$

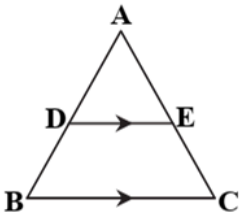
بنابراین:

$$\overset{\triangle}{DQC}: DQ^۲=DC^۲+CQ^۲ \Rightarrow DQ^۲=۴x^۲+y^۲ \xrightarrow{x^۲=۲y^۲} DQ^۲=۹y^۲ \Rightarrow DQ=۳y \Rightarrow DQ=\frac{۳}{۲}\times(۲y)$$

پس طول $DQ$، $۱/۵$ برابر عرض مستطیل است.

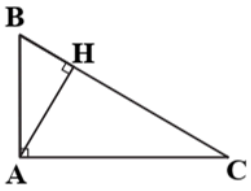
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۵ نکته (تعمیم قضیهٔ تالس): اگر در مثلث $ABC$، $DE \parallel BC$، آنگاه:




$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

نکته: فرض کنید مثلث $ABC$ یک مثلث قائم‌الزاویه و $AH$ ارتفاع وارد بر وتر آن باشد، آنگاه داریم:




$$AC^{۲}=CH\times BC$$

$$AB^{۲}=BH\times BC$$

ابتدا داریم:

$$\begin{cases} ۴AB=۶۰ \Rightarrow AB=۱۵ \\ ۳AC=۶۰ \Rightarrow AC=۲۰ \end{cases}$$

اکنون طول وتر $BC$ را به‌دست می‌آوریم:

$$BC^{۲}=AB^{۲}+AC^{۲}=۲۲۵+۴۰۰=۶۲۵ \Rightarrow BC=۲۵$$

حال طول $HC$ را به‌دست می‌آوریم:

$$AC^{۲}=HC\times CB$$
$$\Rightarrow ۴۰۰=HC\times ۲۵$$
$$\Rightarrow HC=\frac{۴۰۰}{۲۵}=۱۶$$

اکنون می‌توانیم طول $HD$ را با کمک قضیهٔ تالس به‌دست آوریم:

$$HD \parallel AB \Rightarrow \frac{CH}{CB}=\frac{HD}{AB}$$
$$\Rightarrow \frac{۱۶}{۲۵}=\frac{HD}{۱۵}$$
$$\Rightarrow HD=\frac{۱۵\times ۱۶}{۲۵}=۹/۶$$

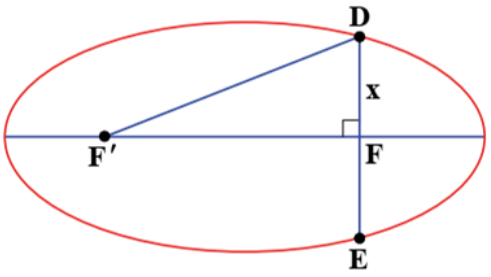
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۶ نکته: مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی، از دو کانون آن، مقدار ثابتی است که برابر با طول قطر بزرگ بیضی است.

نکته: مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامند و معمولاً آن را با حرف $e$ نمایش می‌دهند.

راه حل اول:

ابتدا با توجه به اطلاعات مسئله داریم:




$$\begin{cases} F(۲,۵) \\ \\ F'(-۴,۵) \end{cases} \Rightarrow FF' = ۶$$

$$\Rightarrow ۲c = ۶ \Rightarrow c = ۳$$

$$e = ۰/۶ \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۶}{۱۰} \xrightarrow{c=۳} a = ۵$$

نقطهٔ $D$ روی بیضی است و با فرض $DF = x$، داریم:

$$\overset{\triangle}{DFF'} : (DF')^۲ = (DF)^۲ + (FF')^۲ \Rightarrow (DF')^۲ = x^۲ + ۳۶ \ (*)$$

$$DF + DF' = ۲a \Rightarrow DF' = ۱۰ - x \xrightarrow{\text{توان ۲}} (DF')^۲ = ۱۰۰ - ۲۰x + x^۲$$

$$\xrightarrow{(*)} x^۲ + ۳۶ = ۱۰۰ - ۲۰x + x^۲ \Rightarrow ۲۰x = ۶۴ \Rightarrow x = \frac{۶۴}{۲۰} = \frac{۱۶}{۵}$$

با توجه به تقارن شکل داریم:

$$DE = ۲x \Rightarrow DE = \frac{۳۲}{۵} = ۶/۴$$

راه حل دوم:

نکته: در یک بیضی با قطر بزرگ $۲a$ و قطر کوچک $۲b$، اگر از کانون $F$ عمودی بر قطر بزرگ رسم کنیم تا بیضی را در $D$ و $E$ قطع کند، طول $DE$ (وتر کانونی) برابر با $\frac{۲b^۲}{a}$ است.

با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

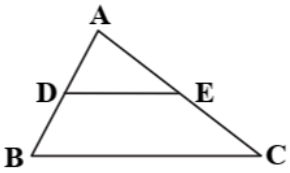
$$c = ۳, a = ۵ \Rightarrow b^۲ = a^۲ - c^۲ \Rightarrow b^۲ = ۱۶$$

بنابراین:

$$DE = \frac{۲b^۲}{a} = \frac{۲ \times ۱۶}{۵} = \frac{۳۲}{۵} = ۶/۴$$

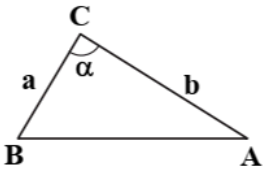
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۹۷** نکته (قضیهٔ تالس): اگر در مثلث ABC، $DE \parallel BC$، آنگاه:




$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

نکته: مساحت هر مثلث با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها برابر است.



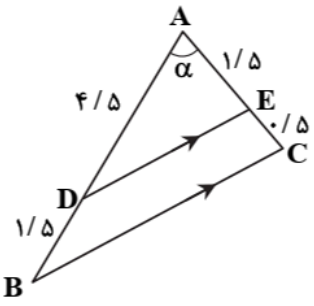

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$$

راه‌حل اول:

با توجه به قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{x+3}{x}=\frac{x}{x-1}\Rightarrow x^2+2x-3=x^2\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

اکنون داریم:




$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}=\frac{\frac{1}{2}\times AB\times AC\times\sin\alpha}{\frac{1}{2}\times AD\times AE\times\sin\alpha}=\frac{6\times 2}{4/5\times 1/5}=\frac{16}{9}$$

$$\xrightarrow{\text{تفصیل در مخرج}}\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{DECB}}=\frac{16}{16-9}=\frac{16}{7}$$

راه‌حل دوم:

نکته: نسبت مساحت دو مثلث متشابه، مربع نسبت تشابه آن دو مثلث است.

بعد از محاسبهٔ مقدار x داریم:

$$\triangle ABC\sim\triangle ADE\Rightarrow \text{نسبت تشابه}=k=\frac{AC}{AE}=\frac{2}{1/5}=\frac{4}{3}$$

بنابراین:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}=k^2\Rightarrow\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}=\frac{16}{9}\xrightarrow{\text{تفصیل در مخرج}}\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{DBCE}}=\frac{16}{16-9}=\frac{16}{7}$$

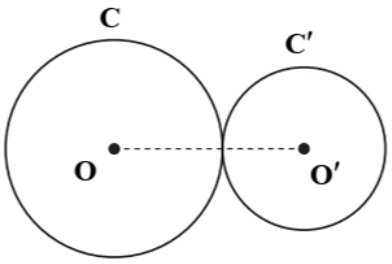
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۸ نکته: رابطهٔ $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲$، معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع $r$ در صفحهٔ مختصات است که به آن معادلهٔ استاندارد دایره می‌گوییم.

نکته: اگر $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ معادلهٔ گستردهٔ یک دایره باشد، مختصات مرکز این دایره $O(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲})$ است. شعاع این دایره برابر است با:

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}.$$

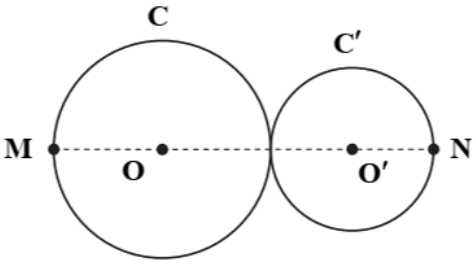
نکته: اگر دایرهٔ $C(O,r)$ و $C'(O',r')$ مماس خارج باشند، آنگاه: $OO'=r+r'$:




ابتدا وضعیت نسبی دو دایره را نسبت به هم مشخص می‌کنیم:

$$c: x^۲+y^۲+۲y-۱۰x+۱۰=۰$$
$$\Rightarrow O(۵,-۱)\ ,\ r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰۰+۴-۴۰}=۴$$
$$c': (x-۱)^۲+(y-۲)^۲=۱$$
$$\Rightarrow O'(۱,۲)\ ,\ r'=۱$$
$$OO'=\sqrt{(۵-۱)^۲+(-۱-۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵ \Rightarrow OO'=r+r'$$

پس دو دایره مماس خارج هستند. اکنون بیشترین مقدار $MN$ را به‌دست می‌آوریم:

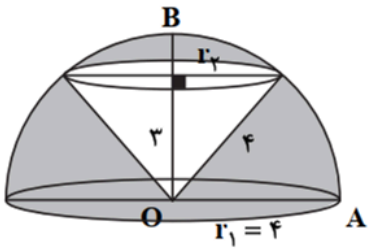



$$MN=۲r+۲r'=۸+۲=۱۰$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۹۹** نکته: حجم کره‌ای به شعاع $r$ برابر $\frac{۴}{۳}\pi r^۳$ و حجم مخروطی به شعاع قاعدهٔ $r$ و ارتفاع $h$ برابر $\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$ است.

جسم حاصل از دوران، نیم‌کره‌ای است که یک مخروط قائم از آن خارج شده است. طبق شکل مقابل ابتدا مقدار $r_۲$ یعنی شعاع قاعدهٔ مخروط را با قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ سمت راست محاسبه می‌کنیم:




$$r_۲^۲ = ۴^۲ - ۳^۲ \Rightarrow r_۲^۲ = ۷ \Rightarrow r_۲ = \sqrt{۷}$$

حجم جسم حاصل برابر است با:

$$\text{نیم‌کره } V_۱ = \frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳}\pi r_۱^۳ = \frac{۲}{۳}\pi\times ۴^۳ = \frac{۲\pi}{۳}\times ۶۴ = \frac{۱۲۸\pi}{۳}$$

$$\text{مخروط } V_۲ = \frac{۱}{۳}\pi r_۲^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi\times ۷\times ۳ = ۷\pi$$

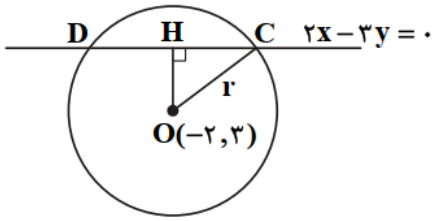
$$V = V_۱ - V_۲ = \frac{۱۲۸\pi}{۳} - ۷\pi = \frac{۱۲۸\pi - ۲۱\pi}{۳} = \frac{۱۰۷\pi}{۳}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۰۰** نکته: معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع $r$ به‌صورت $(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = r^۲$ است.

نکته: در هر دایره‌ای شعاع عمود بر وتر، آن وتر را نصف می‌کند.

با توجه به شکل مقابل داریم:




$$CD = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow CH = \frac{۱}{۲}CD = \frac{۱}{۲}\times ۴\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳}$$

$OH$ فاصلهٔ مرکز دایره تا خط $۲x-۳y=۰$ است.

$$OH = \frac{|۲(-۲)-۳\times ۳|}{\sqrt{۴+۹}} = \frac{|-۴-۹|}{\sqrt{۱۳}} = \frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}} = \sqrt{۱۳}$$

در مثلث $OCH$ رابطهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$OC^۲ = OH^۲ + CH^۲ \Rightarrow r^۲ = (\sqrt{۱۳})^۲ + (۲\sqrt{۳})^۲ = ۱۳ + ۱۲ = ۲۵ \Rightarrow r = ۵$$

حال معادلهٔ دایره را می‌نویسیم و محل برخورد آن با محور $y$ها را می‌یابیم.

$$(x+۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۲۵ \xrightarrow{x=۰} ۴ + (y-۳)^۲ = ۲۵ \Rightarrow (y-۳)^۲ = ۲۱$$

$$\Rightarrow y-۳ = \pm\sqrt{۲۱} \Rightarrow y = ۳\pm\sqrt{۲۱} \Rightarrow \begin{cases} A(۰,۳+\sqrt{۲۱}) \\ B(۰,۳-\sqrt{۲۱}) \end{cases}$$

$$AB = \left|۳+\sqrt{۲۱}-۳+\sqrt{۲۱}\right| = ۲\sqrt{۲۱}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۰۱** نکته: معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع $R$ به‌صورت زیر است:

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$$

نکته: اگر $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ معادلهٔ گستردهٔ یک دایره باشد، مختصات مرکز این دایره $O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$ است و شعاع این دایـره برابر است با:

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$$

باید طول خط‌المرکزین دو دایره برابر با مجموع طول شعاع‌های دو دایره باشد.

$$(x-۱)^۲+(y+۴)^۲=۹ \Rightarrow \text{مرکز } O(۱,-۴)\ ,\ r=\sqrt{۹}=۳$$

$$x^۲+y^۲+۴x-۲y-k=۰ \Rightarrow \text{مرکز } O'(-۲,۱)\ ,\ r'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۴-۴(-k)}$$

$$\Rightarrow r'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰+۴k}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴(۵+k)}=\sqrt{۵+k}$$

$$\text{شرط دایره}: ۵+k>۰ \Rightarrow k>-۵$$

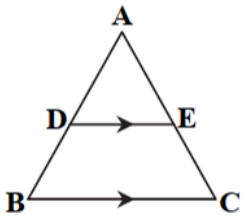
$$OO'=\sqrt{(-۲-۱)^۲+(۱+۴)^۲}=\sqrt{۹+۲۵}=\sqrt{۳۴}$$

$$OO'=r+r' \Rightarrow \sqrt{۳۴}=۳+\sqrt{۵+k} \Rightarrow \sqrt{۵+k}=\sqrt{۳۴}-۳ \Rightarrow ۵+k=۳۴+۹-۶\sqrt{۳۴} \Rightarrow k=۳۸-۶\sqrt{۳۴}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

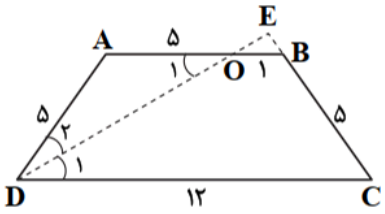
**۱۰۲** نکته (تعمیم قضیهٔ تالس): اگر در مثلث $ABC$، $DE \parallel BC$، آنگاه:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$




با توجه به معلومات مسئله داریم:

$$BC=AD=۵, AB=۶, DC=۱۲$$




اکنون داریم:

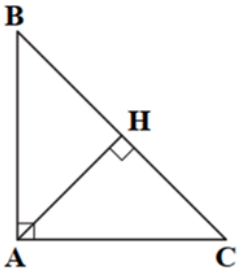
$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DC \text{ مورب و } DE \Rightarrow \hat{D}_۱=\hat{O}_۱ \\ \hat{D} \text{ نیمساز زاویهٔ } DO \Rightarrow \hat{D}_۱=\hat{D}_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_۱=\hat{D}_۲ \Rightarrow \overset{\triangle}{AOD} \text{ متساوی‌الساقین} \Rightarrow AO=AD=۵$$

پس $OB=۱$ است. اکنون با فرض $EB=x$ داریم:

$$\overset{\triangle}{EDC}: OB \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{EB}{EC}=\frac{OB}{DC} \Rightarrow \frac{x}{۵+x}=\frac{۱}{۱۲} \Rightarrow ۱۲x=۵+x \Rightarrow x=\frac{۵}{۱۱} \Rightarrow BE=\frac{۵}{۱۱}$$

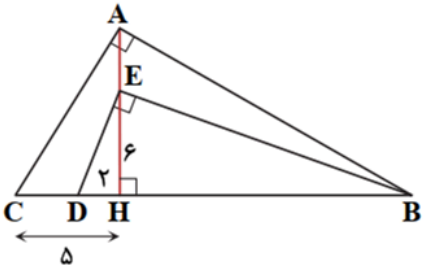
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۰۳** نکته: فرض کنید مثلث $ABC$ یک مثلث قائم‌الزاویه و $AH$ ارتفاع وارد بر وتر آن باشد، آنگاه داریم:




$$AC^2 = CH \times BC \quad , \quad AB^2 = BH \times BC \quad , \quad AH^2 = BH \times CH$$

با توجه به روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:




$$\overset{\triangle}{EBD} : EH^2 = DH \times HB \Rightarrow ۳۶ = ۲ \times HB \Rightarrow HB = ۱۸$$

بنابراین $CB = ۵ + ۱۸ = ۲۳$.

$$\overset{\triangle}{ABC} : AC^2 = CH \times CB \Rightarrow AC^2 = ۵ \times ۲۳ \Rightarrow AC = \sqrt{۱۱۵}$$

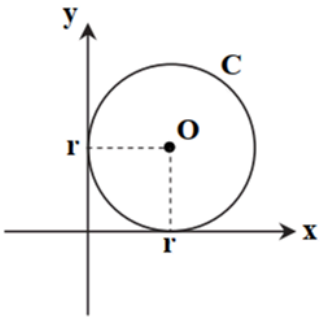
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۰۴** نکته: رابطهٔ $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع $r$ در صفحهٔ مختصات است که به آن معادلهٔ استاندارد دایره می‌گوییم.

نکته: اگر $x^2 + y^2 + ax + by + c = ۰$ معادلهٔ گستردهٔ یک دایره باشد، مختصات مرکز این دایره $O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$ است. شعاع این دایره برابر است با:

$$r = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^2 + b^2 - ۴c}.$$

چون دایره‌های موردنظر از نقطهٔ $A(۴,۸)$ می‌گذرند و بر هر دو محور مختصات مماس‌اند، پس هر دو در ناحیهٔ اول هستند. اگر شعاع دایره $r$ باشد، مختصات مرکز آن $O(r,r)$ است، پس داریم:




معادلهٔ دایره: $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2 \xrightarrow[\text{روی دایره}]{A(۴,۸)} (۴-r)^2 + (۸-r)^2 = r^2$

$$\Rightarrow ۱۶ - ۸r + r^2 + ۶۴ - ۱۶r + r^2 = r^2 \Rightarrow r^2 - ۲۴r + ۸۰ = ۰$$

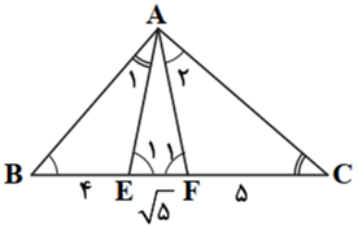
$$\Rightarrow (r-۲۰)(r-۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} r_۱ = ۲۰ \\ r_۲ = ۴ \end{cases}$$

اکنون مختصات مرکز دایرهٔ داده‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 + ۲۰x - ۴y = ۰ \Rightarrow O'(-۱۰,۲)$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۰۵** نکته: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشد، دو مثلث متشابه‌اند.




دو مثلث ABE و AFC متشابه‌اند؛ زیرا:

$$\begin{cases}\hat{B}=\hat{A}_2\\ \hat{C}=\hat{A}_1\end{cases}\Rightarrow \overset{\triangle}{ABE}\sim\overset{\triangle}{AFC}\Rightarrow \frac{BE}{AF}=\frac{AE}{FC}\qquad (I)$$

از طرفی می‌دانیم زاویهٔ خارجی هر مثلث برابر است با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن.

بنابراین:

$$\begin{cases}\hat{E}_1=\hat{A}_1+\hat{B}\\ \hat{F}_1=\hat{A}_2+\hat{C}\end{cases}\xrightarrow[\hat{A}_2=\hat{B}]{\hat{A}_1=\hat{C}}\hat{E}_1=\hat{F}_1\Rightarrow \overset{\triangle}{AEF}\text{ متساوی‌الساقین است.}\Rightarrow AE=AF\qquad (II)$$

$$(I)\text{ و }(II)\Rightarrow \frac{BE}{AE}=\frac{AE}{FC}\Rightarrow AE^2=BE\cdot FC$$

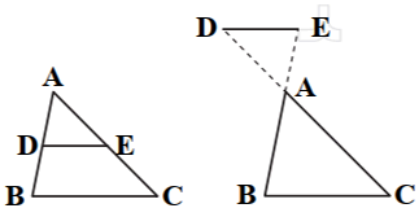
بنابراین داریم:

$$AE^2=4\times 5\Rightarrow AE=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\Rightarrow AF=2\sqrt{5}$$

$$\text{محیط مثلث } AEF=2\sqrt{5}+2\sqrt{5}+\sqrt{5}=5\sqrt{5}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۰۶** نکته: اگر خطی موازی ضلع مثلثی رسم شود و دو ضلع دیگر (یا امتداد آن‌ها) را قطع کند، مثلث کوچک به‌وجود آمده با مثلث اولیه متشابه است.




$$DE\parallel BC\Rightarrow ADE\sim ABC$$

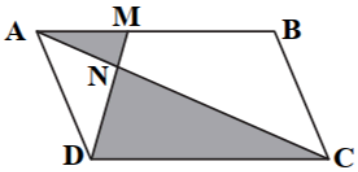
نکته: اگر نسبت تشابه دو مثلث متشابه برابر k باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر $k^2$ است.

یادآوری: می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های مقابل دوبه‌دو موازی و مساوی‌اند.

ابتدا شکل مسئله را رسم می‌کنیم:

$$ABCD\text{ متوازی‌الاضلاع}\Rightarrow AM\parallel DC\xrightarrow{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}}\overset{\triangle}{AMN}\sim\overset{\triangle}{NDC}$$

اکنون با توجه به تساوی زاویه‌های $A\hat{N}M$ و $D\hat{N}C$ نسبت تشابه را به‌دست می‌آوریم:



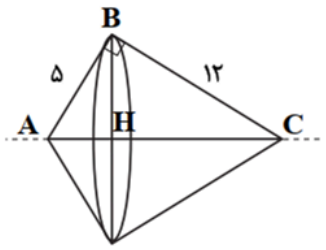

$$\begin{cases}\frac{DC}{AM}=k\\ DC=AB\end{cases}\Rightarrow \frac{AB}{AM}=k\xrightarrow{BM=3AM}\frac{AB}{AM}=4\Rightarrow k=4$$

$$\frac{S_{NDC}}{S_{AMN}}=k^2\Rightarrow \frac{S_{NDC}}{S_{AMN}}=16$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۰۷** نکته: حجم یک مخروط به شعاع قاعدهٔ $r$ و ارتفاع $h$ برابر است با: $V_{\text{مخروط}} = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$

از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول وتر $AC$ دو مخروط قائم به‌وجود می‌آید که قاعدهٔ آن‌ها یکسان است. باید $AC$ و $BH$ را محاسبه کنیم:




$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ = ۵^۲ + ۱۲^۲ = ۲۵ + ۱۴۴ = ۱۶۹ \Rightarrow AC = ۱۳$$

$$AB \times BC = BH \times AC \Rightarrow ۵ \times ۱۲ = BH \times ۱۳ \Rightarrow BH = \frac{۶۰}{۱۳}$$

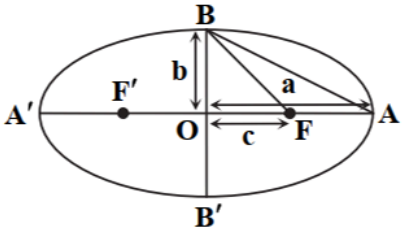
$$V = \frac{۱}{۳}\pi \times BH^۲ \times AH + \frac{۱}{۳}\pi \times BH^۲ \times CH = \frac{۱}{۳}\pi \times BH^۲ (AH + CH)$$

$$V = \frac{۱}{۳}\pi \times BH^۲ \times AC = \frac{۱}{۳}\pi \times (\frac{۶۰}{۱۳})^۲ \times ۱۳ = \frac{۱۲۰۰\pi}{۱۳}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۰۸** نکته: در بیضی، $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌گویند.

طبق شکل مقابل داریم:




$$S_{\triangle OBF} = \frac{۱}{۲} OB \cdot OF = \frac{۱}{۲} b \cdot c$$

$$S_{\triangle ABF} = \frac{۱}{۲} OB \cdot AF = \frac{۱}{۲} b(OA - OF) = \frac{۱}{۲} b(a - c)$$

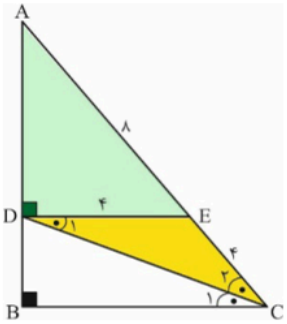
$$S_{\triangle OBF} = ۳ S_{\triangle ABF} \Rightarrow \frac{۱}{۲} bc = \frac{۳}{۲} b(a - c)$$

$$\Rightarrow c = ۳(a - c) \Rightarrow c = ۳a - ۳c \Rightarrow ۴c = ۳a$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \text{خروج از مرکز } e = \frac{۳}{۴}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۰۹** چون $DE \| BC$ و خط $CD$ مورب اســـت، پس $\hat{C}_۱ = \hat{D}_۱$ است. در ضمن $CD$ نیمساز زاویهٔ $\hat{C}$ است، پس $\hat{C}_۱ = \hat{C}_۲$ و در نتیجه مثلث $DEC$ متســـاوی الساقین است و $DE = EC = ۴$ می‌باشد. حال با توجه قضیهٔ فیثاغورث در مثلث $ADE$ داریم:



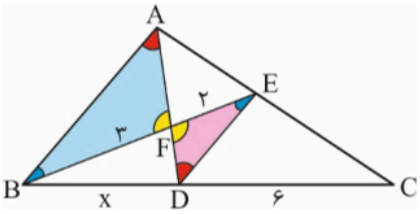

$$AD^۲ + DE^۲ = AE^۲ \Rightarrow AD^۲ = ۸^۲ - ۴^۲ = ۴۸ \Rightarrow AD = ۴\sqrt{۳}$$

حال با توجه به قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB} \Rightarrow \frac{۸}{۴} = \frac{۴\sqrt{۳}}{DB} \Rightarrow DB = ۲\sqrt{۳}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۱۰** **پله اول:** مطابق شکل مثلث‌های ABF و DEF متشابه هستند، پس:



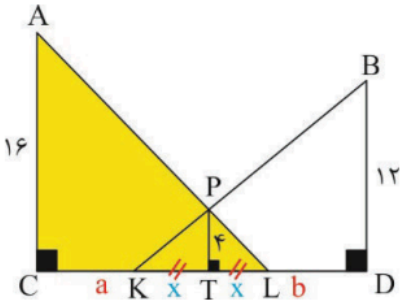

$$\frac{DE}{AB}=\frac{EF}{BF}\Rightarrow\frac{DE}{AB}=\frac{۲}{۳}$$

**پله دوم:** با استفاده از تالس جز به کل در مثلث ABC داریم:

$$\frac{CD}{BC}=\frac{DE}{AB}\Rightarrow\frac{۶}{۶+x}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۲x+۱۲=۱۸\Rightarrow x=۳$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۱۱** یک بار در مثلث ACL و یک بار هم در مثلث BDK از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم:




$$\text{مثلث ACL}:\frac{۴}{۱۶}=\frac{x}{۲x+a}\Rightarrow ۲x+a=۴x\Rightarrow a=۲x$$

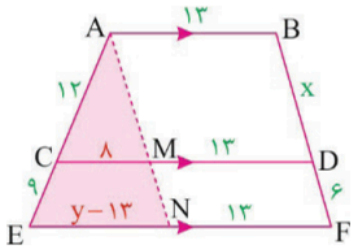
$$\text{مثلث BDK}:\frac{۴}{۱۲}=\frac{x}{۲x+b}\Rightarrow ۲x+b=۳x\Rightarrow b=x$$

از طرفی طبق صورت سؤال $CD=۴۰$ است، پس:

$$a+۲x+b=۴۰\Rightarrow ۲x+۲x+x=۴۰\Rightarrow x=۸\Rightarrow CT=a+x=۳x=۲۴$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۱۲** می‌دانیم که چهار پاره خط ایجاد شده روی ساق‌های ذوزنقه توسط CD ، طبق تالس متناسب‌اند، یعنی:



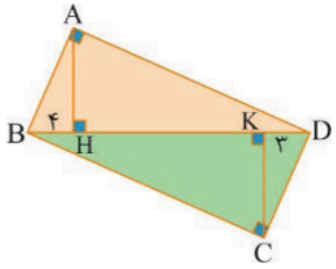

$$\frac{AC}{CE}=\frac{BD}{DF}\Rightarrow\frac{۱۲}{۹}=\frac{x}{۶}\Rightarrow x=۸$$

حال از رأس A خطی به موازات ساق BF رسم می‌کنیم و با استفاده از تالس جزء به کل در مثلث AEN داریم:

$$\frac{۱۲}{۱۲+۹}=\frac{۸}{y-۱۳}\Rightarrow y-۱۳=۱۴\Rightarrow y=۲۷\Rightarrow x+y=۳۵$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۱۳** با فرض $BD=x$ در مثلث‌های ABD و BCD داریم:



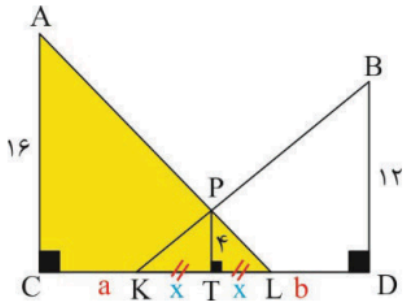

$$\triangle ABD: AB^۲=BH\times BD=۴x$$

$$\triangle BCD: CD^۲=KD\times BD=۳x$$

$$\Rightarrow\frac{CD^۲}{AB^۲}=\frac{۳x}{۴x}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{CD}{AB}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۱۴** یک بار در مثلث ACL و یک بار هم در مثلث BDK از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم:




$$\text{ACL مثلث}: \frac{۴}{۱۶}=\frac{x}{۲x+a} \Rightarrow ۲x+a=۴x \Rightarrow a=۲x$$

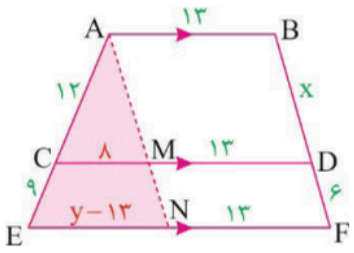
$$\text{BDK مثلث}: \frac{۴}{۱۲}=\frac{x}{۲x+b} \Rightarrow ۲x+b=۳x \Rightarrow b=x$$

از طرفی طبق صورت سؤال $CD=۴۰$ است، پس:

$$a+۲x+b=۴۰ \Rightarrow ۲x+۲x+x=۴۰ \Rightarrow x=۸ \Rightarrow CT=a+x=۳x=۲۴$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۱۵** می‌دانیم که چهار پاره خط ایجاد شده روی ساق‌های ذوزنقه توسط CD ، طبق تالس متناسب‌اند، یعنی:



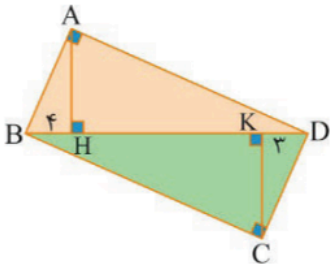

$$\frac{AC}{CE}=\frac{BD}{DF} \Rightarrow \frac{۱۲}{۹}=\frac{x}{۶} \Rightarrow x=۸$$

حال از رأس A خطی به موازات ساق BF رسم می‌کنیم و با استفاده از تالس جزء به کل در مثلث AEN داریم:

$$\frac{۱۲}{۱۲+۹}=\frac{۸}{y-۱۳} \Rightarrow y-۱۳=۱۴ \Rightarrow y=۲۷ \Rightarrow x+y=۳۵$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۱۶** با فرض $BD=x$ در مثلث‌های ABD و BCD داریم:



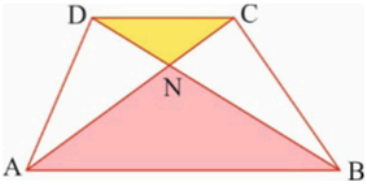

$$\triangle ABD: AB^۲=BH\times BD=۴x$$

$$\triangle BCD: CD^۲=KD\times BD=۳x$$

$$\Rightarrow \frac{CD^۲}{AB^۲}=\frac{۳x}{۴x}=\frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{CD}{AB}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۱۷** اگر نسبت تشابه دو مثلث ABN و DNC برابر k باشد، داریم:



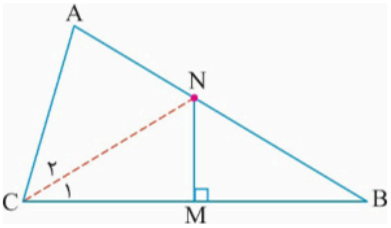

$$k^۲=\frac{S_{ABN}}{S_{DNC}} \Rightarrow k^۲=\frac{۲۷}{۱۲}=\frac{۹}{۴} \Rightarrow k=\frac{۳}{۲} \rightarrow S_{BCN}=KS_{DNC}$$

$$\Rightarrow S_{BCN}=S_{AND}=\frac{۳}{۲}\times ۱۲=۱۸$$

$$S_{ABCD}=S_{BCN}+S_{ABN}+S_{DNC}+S_{AND}=۱۸+۲۷+۱۲+۱۸=۷۵$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۱۸** چون N روی عمود منصف است از دو سر پاره خط به یک فاصله است و مثلث $\overset{\triangle}{NBC}$ متساوی الساقین خواهد بود.




$$B = C_1 = x \qquad A\hat{C}N = C_2 = ۷۲^\circ$$

$$AB = BC \Rightarrow \qquad C = A = ۷۲^\circ + x$$

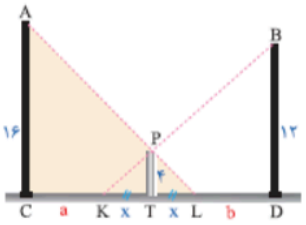
$$A + C + B = ۱۸۰^\circ \rightarrow (۷۲^\circ + x) + (۷۲^\circ + x) + x = ۱۸۰^\circ$$

$$\rightarrow ۱۴۴^\circ + ۳x = ۱۸۰^\circ \rightarrow x = ۱۲ \rightarrow \hat{B} = ۱۲^\circ$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۱۹** **سرنخ** قضیه تالس را در دو مثلث بزرگ به کار برده و LD و CK را به دست آورید.

یک بار در مثلث ACL و یک بار هم در مثلث BDK از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم.




$$\text{ACL مثلث}: \frac{۴}{۱۶} = \frac{x}{۲x + a} \Rightarrow ۲x + a = ۴x \Rightarrow a = ۲x$$

$$\text{BDK مثلث}: \frac{۴}{۱۲} = \frac{x}{۲x + b} \Rightarrow ۲x + b = ۳x \Rightarrow b = x$$

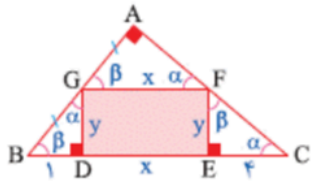
از طرفی طبق صورت سؤال $CD = ۴۰m$ است، پس:

$$a + ۲x + b = ۴۰ \Rightarrow ۲x + ۲x + x = ۴۰ \Rightarrow x = ۸ \Rightarrow CT = a + x = ۳x = ۲۴$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۲۰** **سرنخ** تالس جزء به کل را در مثلث ABC به کار برده و طول ضلع مستطیل را بیابید. عرض مستطیل از تشابه مثلث‌های کناری به‌دست می‌آید.

ابتدا با استفاده از تالس جزء به کل در مثلث ABC داریم:




$$\frac{AG}{AB} = \frac{GF}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{x}{x + ۵} \Rightarrow x = ۵$$

حال مطابق شکل مثلث‌های EFC و BGD متشابه‌اند، پس:

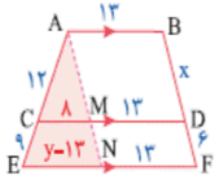
$$\frac{GD}{EC} = \frac{BD}{FE} \Rightarrow \frac{y}{۴} = \frac{۱}{y} \Rightarrow y = ۲$$

پس محیط مستطیل GFED برابر است با:

$$۲(x + y) = ۲(۲ + ۵) = ۱۴$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۲۱** می‌دانیم که چهار پاره‌خط ایجاد شده روی ساق‌های ذوزنقه توسط CD، طبق تالس متناسب‌اند، یعنی:



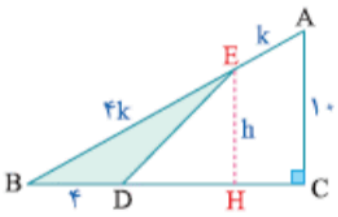

$$\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF} \Rightarrow \frac{۱۲}{۹} = \frac{x}{۶} \Rightarrow x = ۸$$

حال از رأس A خطی به موازات ساق BF رسم می‌کنیم و با استفاده از تالس جزء به کل در مثلث AEN داریم:

$$\frac{۱۲}{۱۲ + ۹} = \frac{۸}{y - ۱۳} \Rightarrow y - ۱۳ = ۱۴ \Rightarrow y = ۲۷ \Rightarrow x + y = ۳۵$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۲۲** **سرنخ** از نقطهٔ E خطی موازی ضلع AC رسم کرده و از قضیه تالس استفاده کنید.



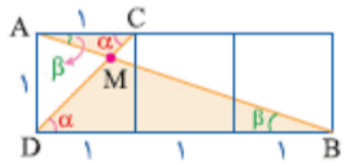

از نقطهٔ E خطی بر ضلع BC عمود می‌کنیم. حال از آن جایی که EH و AC موازی‌اند. با استفاده از تالس جزء به کل داریم:

$$\frac{BE}{BA}=\frac{EH}{AC}\Rightarrow\frac{۴k}{۵k}=\frac{h}{۱۰}\Rightarrow h=۸$$

$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}BD\times h=\frac{۱}{۲}\times۴\times۸=۱۶$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۲۳** **سرنخ** نسبت تشابه را برای دو مثلث بالایی و پایینی بنویسید.




ابتدا با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس وتر مثلث ADإ برابر $\sqrt{۱۰}$ به دست می‌آید.

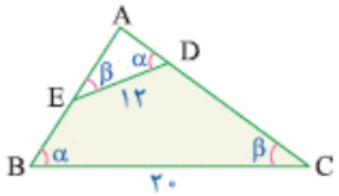
اگر فرض کنیم $MA=x$ باشد پس طول $MB=\sqrt{۱۰}-x$ خواهد بود. مطابق شکل مثلث‌های AMC و DMB متشابه‌اند، در نتیجه:

$$\frac{AC}{BD}=\frac{MA}{MB}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{x}{\sqrt{۱۰}-x}\Rightarrow۴x=\sqrt{۱۰}\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۰}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۲۴** **سرنخ** نسبت تشابه دو مثلث مشابه AED و ABC را به دست آورده و نسبت مساحت‌ها را حساب کنید.

چون زوایای روبه‌رو در چهارضلعی مکمل یکدیگرند. پس زوایای نشان داده شده در شکل با هم برابرند و در نتیجه مثلث‌های ABC و AED با هم متشابه‌اند و نسبت مساحت آن‌ها برابر است با:



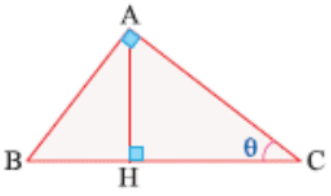

$$\frac{S_{AED}}{S_{ABC}}=\left(\frac{۱۲}{۲۰}\right)^{۲}=\frac{۹}{۲۵}\xrightarrow{\text{فرض می‌کنیم}}\begin{cases}S_{AED}=۹S\\S_{EDCB}=۱۶S\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{S_{EDCB}}{S_{ABC}}=\frac{۱۶S}{۲۵S}=۰/۶۴$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۲۵** **سرنخ** با استفاده از روابط نسبت‌های مثلثاتی در قائم‌الزاویه، طول اضلاع قائم و ارتفاع AH را به دست آورید.

در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:




$$\sin\theta=\frac{AB}{BC}\Rightarrow AB=۲\sin\theta$$

$$\cos\theta=\frac{AC}{BC}\Rightarrow AC=۲\cos\theta$$

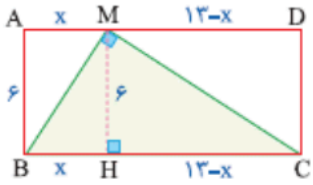
$$AH=\frac{AB\times AC}{BC}\Rightarrow AH=\frac{(۲\sin\theta)(۲\cos\theta)}{۲}$$

$$=۲\sin\theta\cos\theta\Rightarrow AH=\sin۲\theta$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۲۶** **سرنخ** بعد از رسم شکل، با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه، خواسته مسئله به راحتی قابل محاسبه است.

با توجه به مسئله شکل مقابل حاصل می‌شود و در مثلث قائم‌الزاویه BMC داریم:



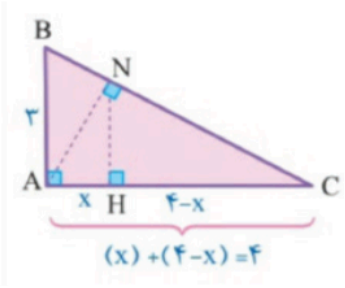

$$MH^2 = BH \times CH \Rightarrow ۶^2 = (x) \times (۱۳ - x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^2 - ۱۳x + ۳۶}_{(x-۴)(x-۹)} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ \checkmark \\ x = ۹ \times \end{cases}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۲۷** **سرنخ** با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه، طول وتر و ارتفاع وارد بر وتر به راحتی قابل محاسبه بوده و سپس x را بیابید.

با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس وتر BC برابر ۵ به دست می‌آید. حال ارتفاع AN را در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC به دست می‌آوریم:




$$AN = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{۳ \times ۴}{۵} = \frac{۱۲}{۵}$$

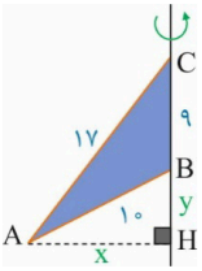
حال در مثلث قائم الزاویهٔ ANC داریم:

$$AN^2 = AH \times AC \Rightarrow \left(\frac{۱۲}{۵}\right)^2 = (x) \times (۴) \Rightarrow x = \frac{۳۶}{۲۵} = ۱/۴۴$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۲۸** **سرنخ** اگر یه شکلِ ناقص، دوران کنه، باید با خودتون بگید اگر کامل بود چی می‌شد؟ بعد بگید حالا اون قسمتی که حذف شده چه شکلی ایجاد می‌کنه؟

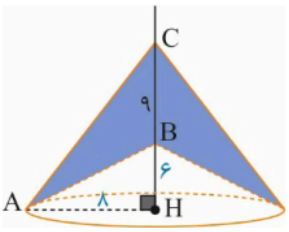
با استفاده از رابطهٔ فیثاغورث در مثلث ABH و ACH داریم:




$$\overset{\triangle}{ABH}: x^2 + y^2 = ۱۰^2 = ۱۰۰$$

$$\overset{\triangle}{ACH}: x^2 + (y+۹)^2 = ۱۷^2 \Rightarrow \underbrace{x^2 + y^2}_{۱۰۰} + ۱۸y + ۸۱ = ۲۸۹ \Rightarrow ۱۸y = ۱۰۸ \Rightarrow y = ۶$$

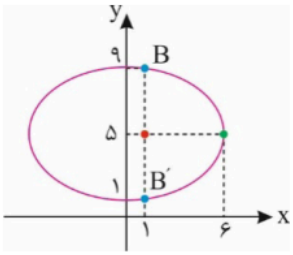
بنابراین $x = ۸$ است و مطابق شکل، حجم حاصل از دوران برابر است با:




$$\Rightarrow V = \frac{۱}{۳}\pi \times ۸^2 \times ۱۵ - \frac{۱}{۳}\pi \times ۸^2 \times ۶ = \frac{۱}{۳}\pi \times ۶۴ \times \underbrace{(۱۵ - ۶)}_{۹} = ۱۹۲\pi$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۲۹** **سرنخ** همیشه تو بیضی به رابطهٔ فیثاغورس فکر کنید. همیشه!




با توجه به رسم بیضی خواهیم داشت که $O(۱,۵)$ و بنابراین $(۶,۵)$ حتماً رأس A است.

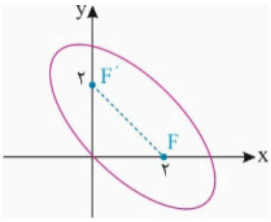
$$a=۵, b=۴$$

$$a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow ۲۵=۱۶+c^۲$$

$$\Rightarrow c^۲=۹ \Rightarrow c=۳ \Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{۳}{۵}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۳۰** **سرنخ** کانون های بیضی رو توی دستگاه مختصات مشخص کنید تا بفهمید قائمه یا مایله یا افقیه.




$$\Rightarrow FF'=۲c=۲\sqrt{۲} \xrightarrow{۲b=۲c} b=c=\sqrt{۲}$$

از طرفی می دانیم مجموع فواصل هر نقطه روی محیط بیضی تا دو کانون آن برابر $۲a$ است، پس:

$$a^۲=b^۲+c^۲=\left(\sqrt{۲}\right)^۲+\left(\sqrt{۲}\right)^۲=۴ \Rightarrow a=۲ \Rightarrow ۲a=۴$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۳۱** **پله اول:** مختصات رأس سهمی را پیدا می‌کنیم و معادله دایره را می‌نویسیم:

$$y=x^۲-۲x-۳ \rightarrow x_S=\frac{۲}{۲}=۱ \rightarrow y_S=-۴$$

در نتیجه مختصات مرکز دایره به‌صورت $(۱,-۴)$ می باشد: $(x-۱)^۲+(y+۴)^۲=r^۲$

**پله دوم:** دایره از ریشه‌های سهمی عبور می‌کند پس مختصات ریشه‌ها باید در معادله دایره صدق کند.

$$x^۲-۲x-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۳, y=۰ \\ x=-۱, y=۰ \end{cases}$$

مختصات یکی از نقاط را در معادله دایره قرار می‌دهیم. مثلاً: $(-۱,۰)$ :

$$(-۲)^۲+۴^۲=r^۲ \Rightarrow r^۲=۲۰$$

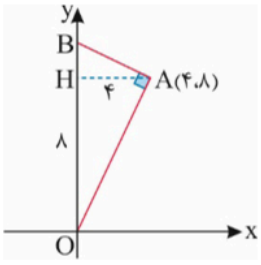
بنابراین معادله دایره به‌صورت:

$$(x-۱)^۲+(y+۴)^۲=۲۰ \Rightarrow x^۲-۲x+y^۲+۸y-۳=۰$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۳۲** **سرنخ** به روابط طولی در مثلث قائمه فکر کنید.

**پله اول:** در مثلث قائم‌الزاویه OAB داریم:




$$AH^۲=OH \times BH$$

$$\Rightarrow ۴^۲=۸ \times BH \Rightarrow BH=۲$$

پس $OB=OH+BH=۸+۲$ است و مختصات نقطهٔ B به‌صورت $B(۰,۱۰)$ است.

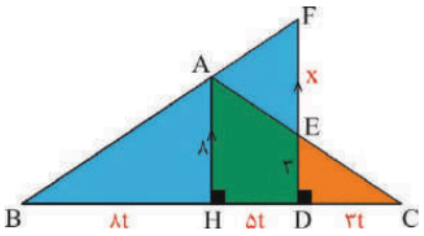
در ضمن $O(۰,۰)$ و $B(۰,۱۰)$ دو سر یک قطر دایره هستند، پس مرکز دایره $M(۰,۵)$ است و داریم:

$$۲R=OB=۱۰ \Rightarrow R=۵$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۳۳** **پله اول:** با توجه به قضیه تالس در مثلث ACH داریم:

$$\frac{CD}{CH}=\frac{DE}{AH}\Rightarrow\frac{CD}{CH}=\frac{۳}{۸}\Rightarrow CD=۳t, CH=۸t$$



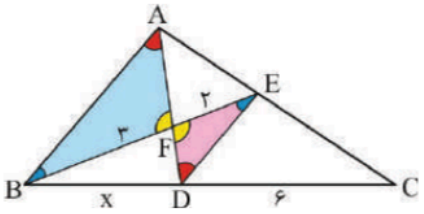

**پله دوم:** از طرفی AB=AC اســـت، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است و $BH=CH$ .

حال با استفاده از قضیه تالس در مثلث BDF داریم:

$$\frac{BH}{BD}=\frac{AH}{DF}\Rightarrow\frac{۸t}{۱۳t}=\frac{۸}{x+۳}\Rightarrow x+۳=۱۳\Rightarrow x=۱۰$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۳۴** **پله اول:** مطابق شکل مثلث‌های ABF و DEF متشابه هستند، پس:



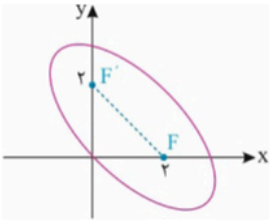

$$\frac{DE}{AB}=\frac{EF}{BF}\Rightarrow\frac{DE}{AB}=\frac{۲}{۳}$$

**پله دوم:** با استفاده از تالس جز به کل در مثلث ABC داریم:

$$\frac{CD}{BC}=\frac{DE}{AB}\Rightarrow\frac{۶}{۶+x}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۲x+۱۲=۱۸\Rightarrow x=۳$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۳۵** سرنخ کانون های بیضی رو توی دستگاه مختصات مشخص کنید تا بفهمید قائمه یا مایله یا افقیه.



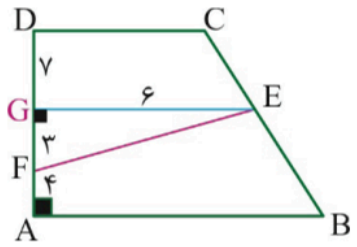

$$\Rightarrow FF'=۲c=۲\sqrt{۲}\xrightarrow{۲b=۲c}b=c=\sqrt{۲}$$

از طرفی می دانیم مجموع فواصل هر نقطه روی محیط بیضی تا دو کانون آن برابر $۲a$ است، پس:

$$a^۲=b^۲+c^۲=\left(\sqrt{۲}\right)^۲+\left(\sqrt{۲}\right)^۲=۴\Rightarrow a=۲\Rightarrow ۲a=۴$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۳۶** از E به G (وسط ضلع AD) وصل می‌کنیم. طول پاره خط EG برابر $\frac{AB+CD}{۲}=\frac{۱۲}{۲}=۶$ است.




$$AD=AF+DF=۴+۱۰=۱۴\rightarrow DG=\frac{AD}{۲}=\frac{۱۴}{۲}=۷$$

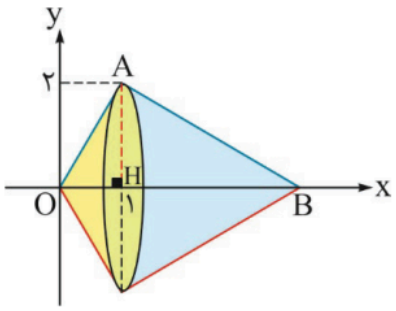
$$GF=DF-DG=۱۰-۷=۳$$

بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ EGF ، طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$FE^۲=GF^۲+EG^۲=(۳)^۲+(۶)^۲=۴۵\rightarrow FE=۳\sqrt{۵}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۳۷** از دوران مثلث قائم الزاویه OAB حول محور xها دو مخروط هم قاعده ایجاد می‌شود:

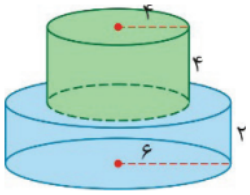



$$AH^۲ = OH \times BH \rightarrow ۲^۲ = ۱ \times BH \rightarrow BH = ۴ \rightarrow OB = OH + BH = ۵$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{مخروط کوچک } V_۱ = \frac{\pi}{۳}(AH)^۲ OH \\ \text{مخروط بزرگ } V_۲ = \frac{\pi}{۳}(AH)^۲ BH \end{array}\right\} \rightarrow \text{کل } V = V_۱ + V_۲ = \frac{\pi}{۳}(AH)^۲ OB = \frac{\pi}{۳}(۲)^۲(۵) = \frac{۲۰\pi}{۳}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۳۸**




$$\Rightarrow V = \pi(۴)^۲(۴) + \pi(۶)^۲(۲) = ۶۴\pi + ۷۲\pi = ۱۳۶\pi cm^۳$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۳۹** با ساده کردن کسر داده شده داریم:

$$\frac{b+c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$$

از طرفی $\frac{c}{a} = e$ و $\frac{b}{a} = \sqrt{۱-e^۲}$ است، بنابراین:

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \sqrt{۱-e^۲} + e = ۱/۴ = \frac{۷}{۵} \rightarrow \sqrt{۱-e^۲} = \frac{۷}{۵} - e$$

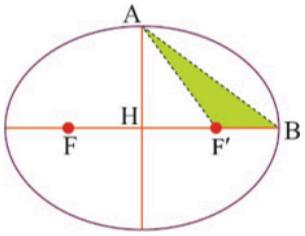
$$\rightarrow ۵\sqrt{۱-e^۲} = ۷ - e \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲۵(۱-e^۲) = (۷-۵e)^۲ \rightarrow ۲۵ - ۲۵e^۲ = ۴۹ + ۲۵e^۲ - ۷۰e$$

$$\rightarrow ۵۰e^۲ - ۷۰e - ۲۴ = ۰ \rightarrow \Delta = ۴۹۰۰ - ۴۸۰۰ = ۱۰۰$$

$$e = \frac{۷۰ \pm ۱۰}{۱۰۰} \rightarrow \begin{cases} e = \frac{۴}{۵} = ۰/۸ \\ e = \frac{۳}{۵} = ۰/۶ \end{cases}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۴۰**




$$۲a = ۱۰, ۲b = ۸$$

$$\Rightarrow c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۵^۲ - ۴^۲ = ۹ \Rightarrow c = ۳$$

$$\Rightarrow BF' = a - c = ۵ - ۳ = ۲$$

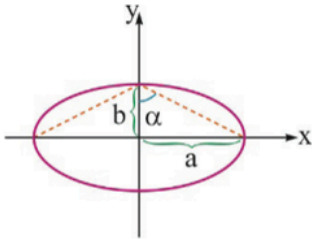
$$AH = b = ۴$$

$$\Rightarrow S = \frac{AH \times BF'}{۲} = \frac{۴ \times ۲}{۲} = ۴$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۴۱**

اگر طرفین رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ را بر $a^۲$ تقسیم کنیم. به رابطهٔ $\left(\frac{c}{a}\right)^۲ + \left(\frac{b}{a}\right)^۲ = ۱$ می رسیم. پس:




$$\left(\sqrt{\frac{۲}{۳}}\right)^۲ + \left(\frac{b}{a}\right)^۲ = ۱ \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^۲ = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{۳}$$

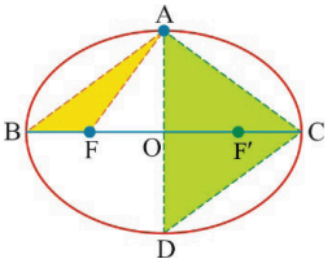
بنابراین در مثلث رنگی داریم:

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \sqrt{۳} \Rightarrow \alpha = ۶۰^\circ$$

بنابراین $\theta = ۲\alpha = ۱۲۰^\circ$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۴۲**

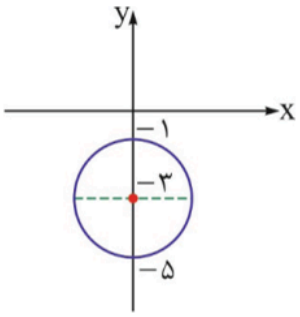



$$\frac{c}{a} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = ۲c$$

$$\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABF}} = \frac{\frac{OC \times AD}{۲}}{\frac{AO \times BF}{۲}} = \frac{a \times ۲b}{b \times (a - c)} = \frac{۲a}{a - c} = \frac{۴c}{۲c - c} = ۴$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۴۳**




مختصات مرکز دایره به‌صورت $M(۰,-۳)$ و شعاع آن برابر $R = \sqrt{۰ + (۳)^۲ - ۵} = ۲$ است؛

اگر $A(x,y)$ نقطه‌ای روی دایره باشد، در این صورت $\sqrt{x^۲ + y^۲}$ فاصلهٔ این نقطه تا مبدأ مختصات است. کمترین مقدار $\sqrt{x^۲ + y^۲}$ برابر با کمترین فاصلهٔ نقاط روی دایره تا مبدأ مختصات می‌شود که با توجه به شکل برابر ۱ واحد است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۴۴** معادلهٔ دایره را به صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ فرض می‌کنیم، چون دایره از نقطهٔ $O(۰,۰)$ می‌گذرد،پس $c=۰$ می‌باشد و داریم:

$$A(۱۲,۰):۱۴۴+۱۲a=۰\Rightarrow a=-۱۲$$

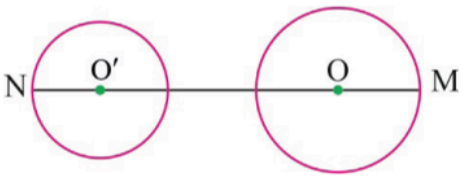
$$B(۰,-۱۶):۲۵۶-۱۶b=۰\Rightarrow b=۱۶$$

پس $x^۲+y^۲-۱۲x+۱۶y=۰$ معادلهٔ دایره می‌باشـــد و $M(۶,-۸)$ مرکز دایره می‌باشد. همچنین شیب قطر موازی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم برابر ۱ می‌باشد، پس داریم:

$$y-y_۰=m(x-x_۰)\xrightarrow[M(۶,-۸)]{m=۱}y+۸=۱\times(x-۶)\Rightarrow y=x-۱۴$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۴۵** ابتدا مختصات مرکز و شعاع هر یک از دایره‌ها را پیدا می‌کنیم:




$$x^۲+y^۲-۲x+۲y-a=۰\Rightarrow O(۱,-۱)$$

$$,r=\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲+a}=\sqrt{۲+a}$$

$$x^۲+y^۲+۴x-۶y+۶a=۰$$

$$\Rightarrow O'(-۲,۳),r'=\sqrt{(-۲)^۲+۳^۲-۶a}=\sqrt{۱۳-۶a}$$

$$OO'=\sqrt{۴^۲+۳^۲}=۵$$

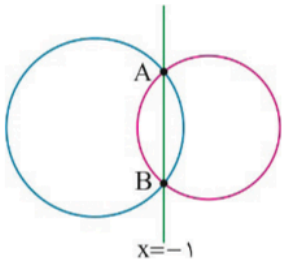
$$MN=۵+\sqrt{۲+a}+\sqrt{۱۳-۶a}=۸\Rightarrow a=۲$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۴۶** ابتدا معادلهٔ وتر مشترک را پیدا می‌کنیم:

$$x^۲-۲x+y^۲-۴=x^۲+۲x+y^۲\Rightarrow ۴x=-۴\Rightarrow x=-۱$$

پس خط $x=-۱$ وتر مشترک این دو دایره است. حالا نقاط برخورد این خط با یکی از این دایره‌ها را پیدا می‌کنیم:



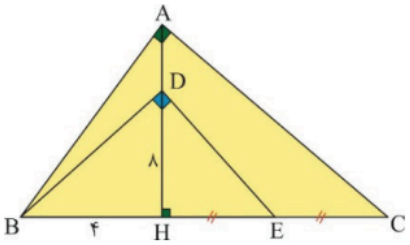

$$x^۲-۲x+y^۲-۴=۰\xrightarrow{x=-۱}y=\pm۱$$

پس نقاط برخورد به صورت $A\begin{vmatrix}-۱\\۱\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}-۱\\-۱\end{vmatrix}$ است که فاصله آنها برابر است با:

$$\text{طول وتر مشترک}=\sqrt{(-۱+۱)^۲+(-۱-۱)^۲}=۲$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۴۷** در مثلث قائم الزاویهٔ BDE داریم:



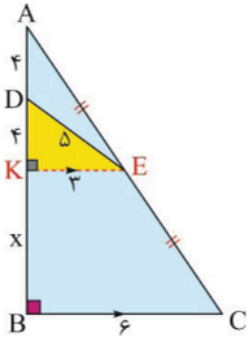

$$DH^{۲} = BH \times EH \Rightarrow ۸^{۲} = ۴ \times HE \Rightarrow HE = ۱۶$$

پس $EH = CE = ۱۶$ می‌باشد و در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$AH^{۲} = BH \times CH \Rightarrow AH^{۲} = ۴ \times (۱۶ + ۱۶) = ۴ \times ۳۲ \Rightarrow AH = ۸\sqrt{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۴۸** از رأس E پاره خط EK را موازی BC رسم می‌کنیم. با توجه به قضیهٔ تالس داریم:




$$\frac{AE}{AC} = \frac{EK}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{EK}{۶} \Rightarrow EK = ۳$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه KED با توجه به اعداد فیثاغورسی ۳,۴,۵ نتیجه می‌گیریم $KD = ۴$ است. با توجه به قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{۸}{KB} = ۱ \Rightarrow KB = ۸ \Rightarrow BD = ۴ + ۸ = ۱۲$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۴۹** مطابق شکل $a = ۴$ و $b = ۲$ است.

$$c^{۲} = a^{۲} - b^{۲} = ۱۶ - ۴ = ۱۲ \rightarrow c = ۲\sqrt{۳}$$

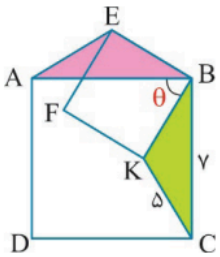
طول مستطیل $= Bc = ۲c$

عرض مستطیل $= AB =$ وتر کانونی $= \frac{۲b^{۲}}{a}$

مساحت مستطیل $= ۲c \times ۲\frac{b^{۲}}{a} = ۴ \times ۲\sqrt{۳} \times \frac{۴}{۴} = ۸\sqrt{۳}$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۵۰** به دو مثلث $\overset{\triangle}{ABE}$ و $\overset{\triangle}{BCK}$ دقت کنید. چون BEFK مربع است، پس $BE = BK$ است و چون ABCD مربع است، پس $AB = BC$ است، در ضمن:




$$\left.\begin{array}{l} \text{در مربع BEFK}: A\hat{B}E + \theta = ۹۰^{\circ} \\ \text{در مربع ABCD}: C\hat{B}K + \theta = ۹۰^{\circ} \end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{B}E = C\hat{B}K$$

پس دو مثلث $\overset{\triangle}{ABE}$ و $\overset{\triangle}{BCK}$ به حالت تساوی دو ضلع و زاویهٔ بین با نسبت تشابه ۱ متشابه‌اند. پس $AE = ۵$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۱

$$\frac{a-c}{2b}=\frac{1}{3}\rightarrow 3a-3c=2b\xrightarrow{\div a}3-3e=\frac{2b}{a}$$

$$3-3e=2\sqrt{1-e^2}\rightarrow 9+9e^2-18e=4-4e^2$$

$$\Rightarrow 13e^2-18e+5=0\begin{cases}e=1\times\\ e=\frac{5}{13}\checkmark\end{cases}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۲

پاسخ تشریحی

**گام اول:** $OL$ نیمساز زاویهٔ $O$ است، پس نقطهٔ $L$ روی نیمساز و از دو ضلع زاویه به یک فاصله است؛ یعنی $LK=LH$ و بنابراین $x=y+1$.

**گام دوم:** مثلث‌های $OHL$ و $OKL$ همنهشت‌اند، چون زاویهٔ قائمه و وتر یکسان $(OL)$ و ضلع مساوی $(HL=LK)$ دارند؛ پس $OH=OK$ و بنابراین $2x-y=x+2y$.

**گام سوم:** از دو معادلهٔ بالا داریم:

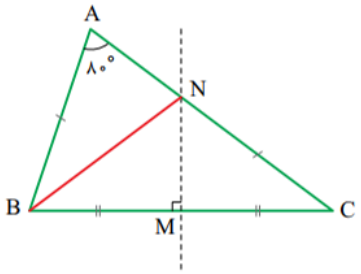
$$\begin{cases}x=y+1\\ x=3y\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\frac{3}{2},y=\frac{1}{2}\Rightarrow OH=OK=\frac{5}{2}=2/5$$

**گام چهارم:** در مثلث $OHK$ دو ضلع مساوی و زاویهٔ بین آن‌ها $60^\circ$ است، پس ضلع سوم هم با آن‌ها مساوی است: $HK=2/5$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۳

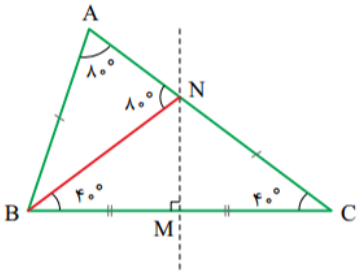



پاسخ تشریحی

**گام اول:** $N$ روی عمودمنصف $BC$ است، پس $BN=CN$ و مثلث $BNC$ متساوی‌الساقین است.

**گام دوم:** چون $AB$ با $CN$ برابر است، داریم $BN=AB=CN$، یعنی مثلث $BAN$ نیز متساوی‌الساقین است؛ پس:

$$\widehat{BNA}=\hat{A}=80^\circ$$




**گام سوم:** زاویهٔ $\widehat{BNA}$ برای مثلث $BNC$ خارجی است؛ پس:

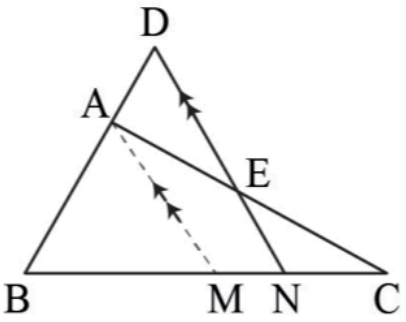
$$\widehat{NBM}=\hat{C}=40^\circ$$

**گام چهارم:** از جمع زوایای مثلث اصلی باید زاویهٔ $B$ برابر $60^\circ$ باشد و داریم:

$$\frac{\hat{B}}{\hat{C}}=\frac{60^\circ}{40^\circ}=1/5$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۵۴**




$$\left.\begin{array}{l} AM \parallel ND \Rightarrow \dfrac{BM}{MN} = \dfrac{AB}{AD} \\ EN \parallel MA \Rightarrow \dfrac{MN}{CM} = \dfrac{AE}{AC} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{درهم‌ضرب}}$$

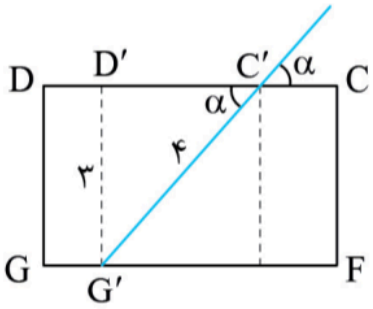
$$1 = \frac{AB \cdot AE}{\underbrace{AD \cdot AC}_{16}} \Rightarrow AB \cdot AE = 16$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۵۵**

اضلاع چهار ضلعی سطح مقطع با هم برابرند یعنی طول آنها برابر $BC = 4$ است.

در مثلث $D'C'G'$ داریم:




$$\sin\alpha = \frac{3}{4} \rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۵۶**

$$\frac{\text{طول}}{\text{عرض}} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

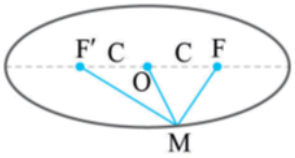
$$e = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{4}{6+2\sqrt{5}}} = \sqrt{1-\frac{2}{3+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)(3-\sqrt{5})}{9-5}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\sqrt{5}-2}{4}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۵۷**

با توجّه به اطّلاعات مسأله داریم:




$$2a = 26 \Rightarrow a = 13$$

$$2b = 10 \Rightarrow b = 5 \xrightarrow{a^2=b^2+c^2} c = 12$$

با توجّه به شکل، $MO = FO = F'O = 12$. در مثلث $MFF'$ میانه وارد بر یک ضلع، نصف آن شد. پس مثلث $MFF'$ قائم الزاویه است. حال داریم:

$$(MF)^2 + (MF')^2 = (FF')^2 = (2c)^2 = 4c^2 = 4 \times (12)^2 = 576$$

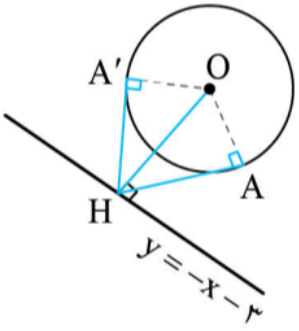
برای به دست آوردن $MF \cdot MF'$ داریم:

$$(MF + MF')^2 = (MF)^2 + 2MF \cdot MF' + (MF')^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(MF + MF')}_{2a}{}^2 - (MF)^2 - (MF')^2 = 2MF \cdot MF' \Rightarrow 2MF \cdot MF' = 4 \times (13)^2 - 4 \times (12)^2 = 4 \times 25 = 100$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۵۸** مختصات مرکز دایره $O(۱,۲)$ و شعاع $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲+۴^۲}=\frac{\sqrt{۲۵}}{۲}=\sqrt{۵}$ است.




مینیمم طول مماس ها در نقطهٔ $H$ از خط اتفاق می افتد که کمترین فاصله تا مرکز را دارد فاصلهٔ $OH$ را می یابیم.

$$OH=\frac{|x+y+۳|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{|۱+۲+۳|}{\sqrt{۲}}=\frac{۶}{\sqrt{۲}}$$

در مثلث قائم الزاویهٔ $OAH$ داریم:

$$AH=\sqrt{OH^۲-R^۲}=\sqrt{\frac{۳۶}{۲}-۵}=\sqrt{۱۳}$$

مجموع $HA+HA'$ برابر $۲\sqrt{۱۳}$ است.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۵۹**

$$O(-۲,-۲)\ \ R=\sqrt{۸+a} \qquad O'(۱,-۲)\ \ R'=۲ \xrightarrow{\text{متقاطع}} |R-R'|\le d\le R+R'$$

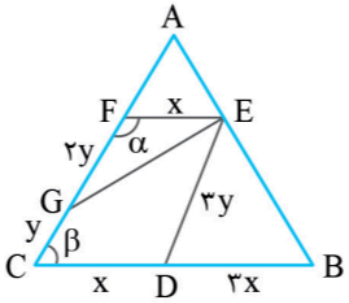
$$d=OO'=۳\Rightarrow |R-۲|\le ۳\le R+۲$$

$$\begin{cases}-۱\le R\le ۵\\ R\ge ۱\end{cases}\xrightarrow{\cap} ۱\le R\le ۵\Rightarrow ۱\le\sqrt{۸+a}\le ۵\rightarrow -۷\le a\le ۱۷$$

$$a=-۷,-۶,\dots,۱۷\xrightarrow{+} ۸+\cdots+۱۷=\frac{۱۰}{۲}(۸+۱۷)=۱۲۵$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۶۰** می دانیم $FEDC$ متوازی الاضلاع است. پس $FC=ED$ و $FC\parallel ED$، $FE\parallel DC$ است:




$$\frac{ED}{AC}=\frac{BD}{BC}\Rightarrow\frac{۳y}{۳y+AF}=\frac{۳x}{۴x}\Rightarrow AF=y$$

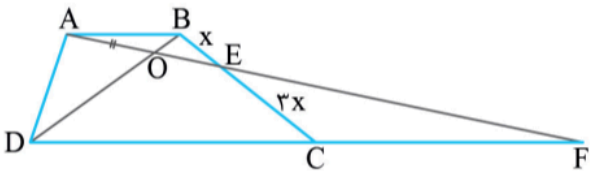
با توجّه به متوازی الاضلاع بودن $FEDC$ داریم:

$$\alpha+\beta=۱۸۰^\circ\Rightarrow\alpha=۱۸۰^\circ-\beta\Rightarrow\sin\alpha=\sin\beta$$

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta FEG}}=\frac{\frac{y}{۲}AC\times BC\times\cancel{\sin\beta}}{\frac{y}{۲}EF\times FG\times\cancel{\sin\alpha}}=\frac{۴y\times۴x}{x\times۲y}=۸$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۶۱** $OE$ را تا برخورد با امتداد $CD$ ادامه می‌دهیم.




دو مثلث $ABE$ و $EFC$ متشابه‌اند و نسبت تشابه $\frac{۱}{۳}$ است. $EF = ۳AE = ۶OA$ و $CF = ۳AB$. همچنین دو مثلث $OAB$ و $ODF$ متشابه‌اند و داریم:

$$k = \frac{AB}{DF} = \frac{OA}{OF}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DC+CF} = \frac{OA}{OE+EF}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DC+۳AB} = \frac{OA}{۷OA} = \frac{۱}{۷} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} ۷AB = DC + ۳AB \Rightarrow DC = ۴AB$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۶۲** شیب مماس در $B$ برابر $-۱$ است، پس شیب شعاع $OB$ برابر ۱ است. چون دایره بر ۲ محور مماس شده، $O$ روی نیمساز ربع اوّل است، پس $OB$ روی $y = x$ قرار می‌گیرد و برای پیدا کردن مختصات $B$ کافی است در معادلهٔ دایره $y = x$ قرار دهیم:

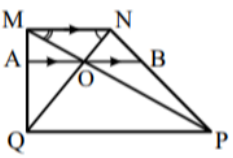
$$\text{مماس بر دو محور} \Rightarrow x_۰ = y_۰ \Rightarrow a = -۶ , r = x_۰ = y_۰ = ۳$$

چون $OA$ موازی محور $y$ و $OB$ روی نیمساز ناحیهٔ اوّل است، $A\hat{O}B = ۴۵^\circ$ و داریم:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{۱}{۲}OA \cdot OB \cdot \sin A\hat{O}B = \frac{۱}{۲}(۳)(۳)(\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = \frac{۹\sqrt{۲}}{۴}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۶۳** از آنجا که $AB$ با قاعده‌ها موازی است، با توجه به قضیه‌ی تالس در ذوزنقه




داریم: $\underbrace{\frac{MA}{MQ} = \frac{NB}{NP}}_{(*)}$.

پس با توجه به شکل داریم:

$$\Delta MPQ \xrightarrow[\text{تعمیم تالس}]{AO \parallel QP} \frac{AO}{QP} = \frac{MA}{MQ} \Rightarrow AO = \frac{MA}{MQ}.QP \quad (۱)$$

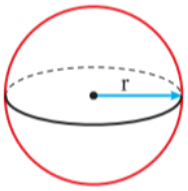
$$\Delta NPQ \xrightarrow[\text{تعمیم تالس}]{BO \parallel PQ} \frac{OB}{QP} = \frac{NB}{NP} \Rightarrow OB = \frac{NB}{NP}.QP \quad (۲)$$

از (۱)، (۲) و $(*)$ نتیجه می‌گیریم: $AO = OB$

دقت کنید که قائم‌الزاویه بودن ذوزنقه در حل سؤال بی‌تأثیر است و این خاصیت در همهٔ ذوزنقه‌ها برقرار است، در حالت کلی:
نکته: اگر از محل تقاطع قطرهای یک ذوزنقه، خطی موازی قاعده‌ها رسم کنیم پاره‌خط جدا شده بین ساق‌های ذوزنقه، توسط نقطهٔ تقاطع قطرها نصف می‌شود؛ یعنی در شکل رسم شده: $OA = OB$

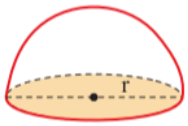
(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۴ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** شعاع کره را $r$ در نظر می‌گیریم. سطح کره به شعاع $r$ برابر است با:



$$S_{\text{کره}} = ۴\pi r^۲$$

**گام دوم:** وقتی یک کرهٔ توپُر را برش می‌زنیم، به طوری که دو نیم‌کرهٔ یکسان ظاهر می‌شود، مطابق شکل زیر سطح کل هر کدام از نیم‌کره‌ها از سطح یک دایره به شعاع $r$ (مقطع بُرش) و سطح یک نیم‌کره به شعاع $r$ تشکیل شده است.



$$S_{\text{کل نیم‌کره}} = S_{\text{دایره}} + S_{\text{نیم‌کره}} = \pi r^۲ + \frac{۴\pi r^۲}{۲} = ۳\pi r^۲$$

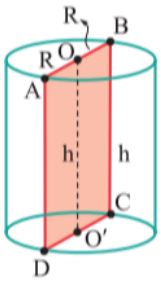
**گام سوم:** خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم.

$$\frac{S_{\text{کل نیم‌کره}}}{S_{\text{کره}}} = \frac{۳\pi r^۲}{۴\pi r^۲} = \frac{۳}{۴} = ٪۷۵$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۵ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** شعاع قاعدهٔ استوانه را $R$ و ارتفاع استوانه را $h$ در نظر می‌گیریم. مطابق شکل زیر، صفحه‌ای که از محور استوانه می‌گذرد، مقطع مستطیل $ABCD$ را در استوانه ایجاد کرده است که عرض این مستطیل برابر با $۲R$ و طول آن $h$ است.

**گام دوم:** طبق صورت سؤال داریم:




$$\text{مجموع مساحت‌های دو قاعدهٔ استوانه} = \text{مساحت مقطع } ABCD$$

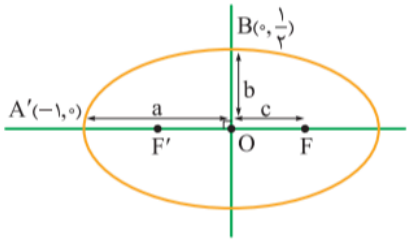
$$\Rightarrow ۲Rh = ۲\times(\pi R^۲) \Rightarrow h = \pi R \xrightarrow{R=۱} h = \pi$$

**گام سوم:** حجم استوانه را حساب می‌کنیم.

$$V = \pi R^۲ h \xrightarrow[R=۱]{h=\pi} V = \pi(۱)^۲ \times \pi = \pi^۲$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۶ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** ابتدا مختصات نقاط $B$ و $A'$ روی خط $d$ را به دست می‌آوریم.




$$\xrightarrow{x=۰} ۰ = ۲y_B - ۱ \Rightarrow y_B = \frac{۱}{۲} \Rightarrow B(۰,\frac{۱}{۲}) \Rightarrow b = \frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{y=۰} x_{A'} = ۲(۰) - ۱ \Rightarrow x_{A'} = -۱ \Rightarrow A'(-۱,۰) \Rightarrow a = ۱$$

**گام دوم:** حال از رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ استفاده می‌کنیم تا $c$ به دست آید. به این ترتیب مختصات نقطهٔ $F$ نیز به دست می‌آید.

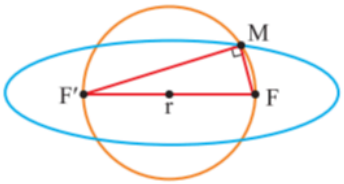
$$۱^۲ = (\frac{۱}{۲})^۲ + c^۲ \Rightarrow c^۲ = \frac{۳}{۴} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow F(\frac{\sqrt{۳}}{۲},۰)$$

**گام سوم:** مطابق درس‌نامه فاصلهٔ نقطهٔ $F$ تا خط $۲y - x - ۱ = ۰$ برابر است با:

$$d = \frac{\left|۲(۰) - \frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۱\right|}{\sqrt{۲^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{\sqrt{۳}+۲}{۲\sqrt{۵}}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۷ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** شکل زیر را رسم می‌کنیم:




**گام دوم:** مساحت دایره $۲\pi$ است؛ پس:

$$\pi r^۲ = ۲\pi \Rightarrow r = \sqrt{۲}$$

**گام سوم:** چون $r = \sqrt{۲}$ است؛ پس فاصلهٔ کانونی بیضی $FF' = ۲r = ۲\sqrt{۲}$ می‌شود.

**گام چهارم:** زاویهٔ $FMF'$ روی دایره یک زاویهٔ محاطی رو به قطر است، پس نصف کمان روبه‌رویش است؛ در نتیجه $F\hat{M}F' = ۹۰^\circ$ است.

**گام پنجم:** رابطهٔ فیثاغورس را در مثلث $FMF'$ می‌نویسیم.

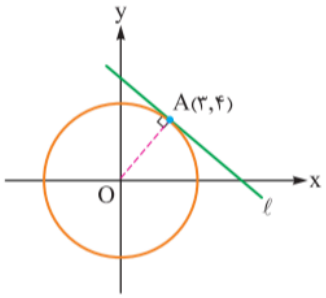
$$MF^۲ + MF'^۲ = FF'^۲ = (۲\sqrt{۲})^۲ = ۸ \quad (۱)$$

**گام ششم:** از آن‌جایی که طول قطر بزرگ بیضی $۲a = ۳$ است و از طرفی می‌دانیم مجموع فاصله‌های هر نقطه روی بیضی از دو کانون، برابر با $۲a$ است؛ پس:

$$MF + MF' = ۳ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \underbrace{MF^۲ + MF'^۲}_{\text{(۱) طبق ۸:}} + ۲MF.MF' = ۹ \Rightarrow ۸ + ۲MF.MF' = ۹ \Rightarrow MF.MF' = \frac{۱}{۲} = ۰/۵$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۸ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** ابتدا شکل سؤال را رسم می‌کنیم.




**گام دوم:** می‌دانیم خط مماس بر دایره، در نقطهٔ تماس بر شعاع دایره در آن نقطه عمود است؛ پس شیب خط $\ell$ قرینه و معکوس شیب پاره‌خط $OA$ است.

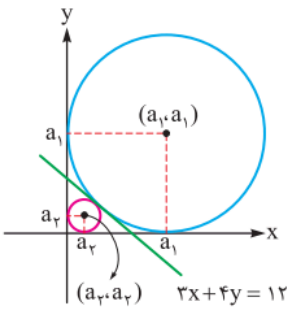
$$m_{OA} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{۴}{۳} \xrightarrow{m_\ell = -\frac{۱}{m_{OA}}} m_\ell = -\frac{۳}{۴}$$

**گام سوم:** معادلهٔ خط $\ell$ را می‌نویسیم.

$$y - ۴ = -\frac{۳}{۴}(x - ۳) \Rightarrow y = -\frac{۳}{۴}x + \frac{۹}{۴} + ۴ \Rightarrow y = -\frac{۳}{۴}x + \frac{۲۵}{۴} \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = \frac{۲۵}{۴} = ۶/۲۵$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۹ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** شکل فرضی مقابل را برای سؤال رسم می‌کنیم.

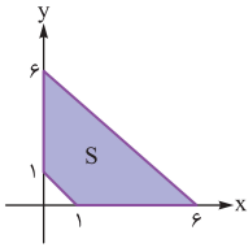



**گام دوم:** مطابق شکل، فاصلهٔ مرکز دایره‌ها از خط برابر با a است؛ پس معادلهٔ زیر را می‌توان نوشت:

$$\text{خط: } 3x+4y-12=0$$

$$\text{فاصلهٔ مرکز دایره‌ها از خط} = \frac{|3a+4a-12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = a \Rightarrow |7a-12| = 5a \Rightarrow \begin{cases} 7a-12=5a \Rightarrow 2a=12 \Rightarrow a_1=6 & \longrightarrow \text{شعاع دایرهٔ بزرگ} \\ 7a-12=-5a \Rightarrow 12a=12 \Rightarrow a_2=1 & \longrightarrow \text{شعاع دایرهٔ کوچک} \end{cases}$$

**گام سوم:** مساحت چهارضلعی مقابل را می‌خواهیم به دست آوریم:




$$S = \frac{6\times 6}{2} - \frac{1\times 1}{2} = 18 - \frac{1}{2} = 17/5$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۰ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** ABCD متوازی‌الاضلاع است، پس:

$$AB \parallel CN \Rightarrow \begin{cases} A\hat{B}M = C\hat{N}M \\ B\hat{A}M = N\hat{C}M \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABM} \overset{zz}{\sim} \overset{\Delta}{CNM}$$

**گام دوم:** نسبت مساحت دو مثلث متشابه ABM و CNM برابر $\frac{4}{9}$ است، پس نسبت تشابه آن‌ها برابر $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ می‌شود:

$$\Rightarrow \frac{CN}{AB} = \frac{CM}{AM} = \frac{MN}{BM} = \frac{2}{3}$$

**گام سوم:** $\frac{CM}{AM} = \frac{2}{3}$ است، پس در مثلث ABC (با خط BM)، نسبت مساحت دو مثلث ABM و BCM برابر می‌شود با:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABM}}}{S_{\overset{\Delta}{ABM}}} = \frac{CM}{AM} = \frac{2}{3} \xrightarrow{S_{\overset{\Delta}{ABM}}=9} \frac{S_{\overset{\Delta}{BCM}}}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{BCM}} = 6$$

**گام چهارم:** حالا دقت کنید که مساحت مثلث ABC برابر جمع مساحت دو مثلث ABM و BCM، یعنی برابر $15 = 6+9$ می‌شود. از طرفی در متوازی‌الاضلاع با رسم قطر، مساحت نصف می‌شود، پس مساحت مثلث ACD هم برابر ۱۵ است.

**گام پنجم:** در آخر داریم:

$$S_{AMND} = S_{ACD} - S_{MNC} = 15 - 4 = 11$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۱ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** از آن‌جایی که $AE \perp CD$ و $AB \parallel CD$ است، پس $AE \perp AB$ است و در نتیجه مثلث $ABF$ قائم‌الزاویه است.

راه حل اول:

**گام دوم:** دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABF$ و $ABO$ در رأس $B$ مشترک هستند، پس با هم متشابه هستند؛ در نتیجه:

$$\overset{\Delta}{ABO} \sim \overset{\Delta}{ABF} \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{OA}{OB} \times \frac{۲}{۲} = \frac{AC}{BD} \xrightarrow[\text{است.}]{\frac{AC}{BD}=\frac{۱}{۳} \text{ طبق صورت سؤال}} \frac{AF}{AB} = \frac{۱}{۳}$$

راه حل دوم:

**گام دوم:** در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ $ABF$ و $ABO$، تانژانت زاویهٔ $B$ را می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABF}: \tan B = \frac{AF}{AB} \\ \overset{\Delta}{ABO}: \tan B = \frac{OA}{OB} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD} = \frac{۱}{۳}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۲ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** ابتدا مرکز و شعاع هر یک از دایره‌ها را حساب می‌کنیم.

$$x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y + a = ۰ \Rightarrow \begin{cases} O_۱ = (-\frac{۲}{۲}, -\frac{(-۴)}{۲}) \Rightarrow O_۱ = (-۱, ۲) \\ R_۱ = \sqrt{\underbrace{(\frac{۲}{۲})^۲}_{۱} + \underbrace{(-\frac{۴}{۲})^۲}_{۴} - a} \Rightarrow R_۱ = \sqrt{۵ - a} \end{cases}$$

$$x^۲ + y^۲ - ۶x + ۲y - ۵۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} O_۲ = (-\frac{(-۶)}{۲}, -\frac{۲}{۲}) \Rightarrow O_۲ = (۳, -۱) \\ R_۲ = \sqrt{\underbrace{(-\frac{۶}{۲})^۲}_{۹} + \underbrace{(\frac{۲}{۲})^۲}_{۱} + ۵۴} = \sqrt{۶۴} \Rightarrow R_۲ = ۸ \end{cases}$$

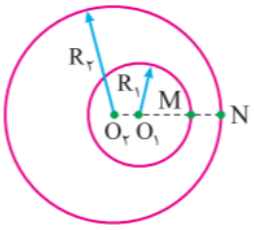
**گام دوم:** فاصلهٔ $O_۱O_۲$ را حساب می‌کنیم:

$$O_۱O_۲ = \sqrt{(۳+۱)^۲ + (-۱-۲)^۲} = \sqrt{۴^۲ + ۳^۲} = ۵$$

**گام سوم:** مسئله را برای دو حالت زیر حل می‌کنیم:

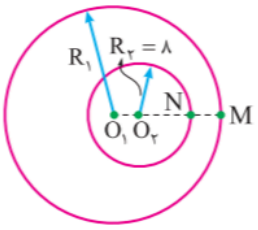
حالت ۱: $R_۱ < R_۲$

$$O_۲N = O_۱O_۲ + O_۱M + MN$$
$$\Rightarrow ۸ = ۵ + \sqrt{۵-a} + ۱$$
$$\Rightarrow \sqrt{۵-a} = ۲ \Rightarrow ۵ - a = ۴$$
$$\Rightarrow a = ۱$$




حالت ۲: $R_۱ > R_۲$

$$O_۱M = O_۱O_۲ + O_۲N + MN$$
$$\Rightarrow \sqrt{۵-a} = ۵ + ۸ + ۱$$
$$\Rightarrow \sqrt{۵-a} = ۱۴ \Rightarrow ۵ - a = ۱۹۶$$
$$\Rightarrow a = -۱۹۱$$

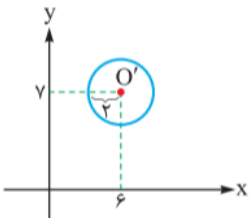



**گام چهارم:** در حالت اول شعاع دایرهٔ کوچک‌تر $R_۱ = \sqrt{۵-۱} = ۲$ و در حالت دوم شعاع دایرهٔ کوچک‌تر $R_۲ = ۸$ است که تنها حالت اول در گزینه‌ها است.

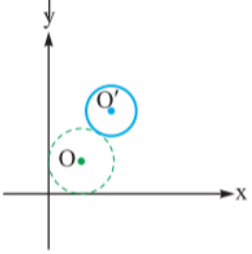
(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

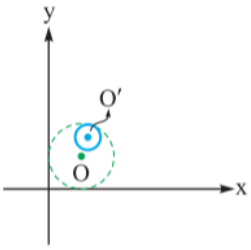
**۱۷۳** **پاسخ تشریحی** **گام اول:** از آن‌جایی که دایرهٔ مد نظر بر هر دو محور مختصات مماس است، مختصات مرکز آن به صورت $O(\alpha,\alpha)$ و شعاع آن برابر با $R=\alpha$ است.

**گام دوم:** دایرهٔ $x^۲+y^۲-۱۲x-۱۴y+۸۱=۰$، دایره‌ای به مرکز $O'(۶\ و\ ۷)$ و به شعاع $R=\frac{\sqrt{۱۲^۲+۱۴^۲-۴\times۸۱}}{۲}=\frac{۴}{۲}=۲$ است.




**گام سوم:** از آن‌جایی که شعاع کوچک‌ترین دایره‌ای را می‌خواهیم که بر دایرهٔ مفروض مماس باشد، باید دو دایره مماس‌خارج باشند. (به شکل‌های زیر توجه کنید).




$$OO'=R+R' \Rightarrow \sqrt{(\alpha-۶)^۲+(\alpha-۷)^۲}=۲+\alpha$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}} \alpha^۲-۱۲\alpha+۳۶+\alpha^۲-۱۴\alpha+۴۹=۴+۴\alpha+\alpha^۲ \Rightarrow \alpha^۲-۳۰\alpha+۸۱=۰$$

$$\Rightarrow (\alpha-۳)(\alpha-۲۷)=۰ \Rightarrow \begin{cases}\alpha=۳\\ \alpha=۲۷\end{cases}$$

پس شعاع کوچک‌ترین دایره برابر با ۳ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۷۴** دو ضلع AB و DC با هم موازی‌اند. بنابراین هر خط عمود بر یکی از این دو خط، بر دیگری نیز عمود است. پس: $H\hat{A}B=۹۰^\circ$ و مثلث ABH در رأس A قائمه است، پس طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABH داریم:

$$(۱): AH^۲=HM\times BH \Rightarrow \left(۲\sqrt{۱۳}\right)^۲=HM\times(۹+HM)$$

$$\Rightarrow ۵۲=HM\times(۹+HM) \Rightarrow HM=۴$$

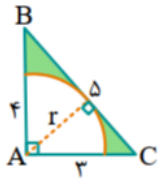
$$(۲): AB^۲=BM\times BH \Rightarrow AB=\sqrt{۹\times(۹+۴)}=۳\sqrt{۱۳}$$

حال مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD برابر است با:

$$S_{ABCD}=AB\times AH=۳\sqrt{۱۳}\times۲\sqrt{۱۳}=۶\times۱۳=۷۸$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۷۵** شعاع ربع دایره همان ارتفاع وارد بر وتر است. در مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر برابر است با $\frac{\text{حاصل‌ضرب اضلاع قائم}}{\text{وتر}}$، پس:



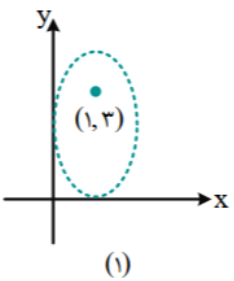

$$r=\frac{۴\times۳}{۵}=\frac{۱۲}{۵}$$

با دوران شکل حاصل حول ضلع AB یک مخروط تشکیل می‌شود که یک نیم‌کره از آن کم شده است.

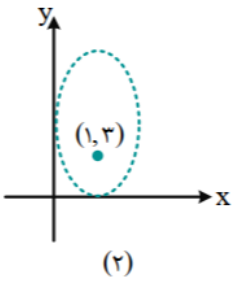
$$V=\frac{\pi}{۳}R^۲H-\frac{۲}{۳}\pi r^۳=\frac{\pi}{۳}(۳)^۲(۴)-\frac{۲}{۳}\pi\left(\frac{۱۲}{۵}\right)^۳=۱۲\pi-۸\pi\left(\frac{(۱۲)^۲}{۱۲۵}\right)=۱۲\pi\left(۱-\frac{۸\times۱۲}{۱۲۵}\right)=۱۲\pi\left(\frac{۱۲۵-۹۶}{۱۲۵}\right)=۱۲\pi\left(\frac{۲۹}{۱۲۵}\right)=۲/۷۸۴\pi\simeq۲/۸\pi$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۷۶** یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:



(۱)



(۲)

$$\text{حالت (۱)}: \begin{cases} b=۱ \Rightarrow b^۲=۱ \Rightarrow a^۲-c^۲=۱ \Rightarrow (a-c)(a+c)=۱ \xrightarrow{(*)} a-c=\frac{۱}{۳} \\ a+c=۳ \ (*) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+c=۳ \\ a-c=\frac{۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow ۲a=\frac{۱۰}{۳} \Rightarrow a=\frac{۵}{۳} \Rightarrow c=\frac{۴}{۳} \Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}=۰/۸$$

$$\text{حالت (۲)}: \begin{cases} b=۱ \Rightarrow b^۲=۱ \Rightarrow a^۲-c^۲=۱ \Rightarrow (a-c)(a+c)=۱ \xrightarrow{(*)} a+c=\frac{۱}{۳} \\ a-c=۳ \ (*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+c=\frac{۱}{۳} \\ a-c=۳ \end{cases} \Rightarrow ۲a=\frac{۱۰}{۳} \Rightarrow a=\frac{۵}{۳} \Rightarrow c=-\frac{۴}{۳} \times$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۷۷** مرکز بیضی وسط دو کانون قرار دارد:

$$F(۱,-۳), F'(۱,۵) \Rightarrow O(۱,\frac{۵-۳}{۲})=(۱,۱)$$

فاصله دو کانون از هم $۲c=۸$ واحد است:

اگر نقطه‌ای خارج بیضی باشد، مجموع فاصله آن از دو کانون بیشتر از $۲a=۱۰$ است:

$$\left.\begin{matrix} c=۴ \\ ۲b=۶ \Rightarrow b=۳ \end{matrix}\right\} \Rightarrow a=\sqrt{b^۲+c^۲}=۵$$

**بررسی گزینه‌ها:**

۱

۲

۳

۴

$$A(۴,۱) \Rightarrow AF+AF'=\sqrt{۹+۱۶}+\sqrt{۹+۱۶}=۵+۵=۱۰=۲a$$

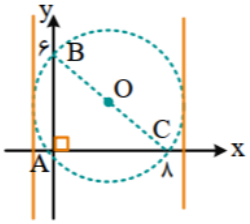
$$B(۲,۲) \Rightarrow BF+BF'=\sqrt{۱+۲۵}+\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۲۶}+\sqrt{۱۰}<۲a$$

$$C(۰,۳) \Rightarrow CF+CF'=\sqrt{۱+۳۶}+\sqrt{۱+۴}=\sqrt{۳۷}+\sqrt{۵}<۲a$$

$$D(۴,۰) \Rightarrow DF+DF'=\sqrt{۹+۹}+\sqrt{۹+۲۵}=\sqrt{۱۸}+\sqrt{۳۴}>۲a$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۷۸** مثلث ABC در زاویه A قائمه است، پس BC قطر دایره است. بنابراین مرکز دایره وسط BC و طول شعاع $\frac{BC}{۲}$ است:




$$B(۰,۶), C(۸,۰) \Rightarrow O(۴,۳) \ , \ r=\frac{BC}{۲}=\frac{\sqrt{۸^۲+۶^۲}}{۲}=۵$$

بنابراین، خطوط قائم $x=۹$ و $x=-۱$ بر دایره مماس هستند. حاصل‌ضرب مقادیر $\alpha$ برابر $۹\times(-۱)=-۹$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۷۹** فاصله مرکز دایره تا خط مذکور برابر با شعاع دایره است:

$$x^۲+y^۲-۴x+۶y+k=۰ \Rightarrow O(۲,-۳), r=\frac{\sqrt{۱۶+۳۶-۴k}}{۲}=\sqrt{۱۳-k}$$

$$O(۲,-۳), y-x=۰ \xrightarrow{\text{فاصلهٔ نقطه از خط}} OH=\frac{|-۳-۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۵}{\sqrt{۲}}$$

$$\sqrt{۱۳-k}=\frac{۵}{\sqrt{۲}} \Rightarrow ۱۳-k=\frac{۲۵}{۲} \Rightarrow k=\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{معادله دایره}} x^۲+y^۲-۴x+۶y+\frac{۱}{۲}=۰$$

با قرار دادن $y=x$ در معادله دایره داریم:

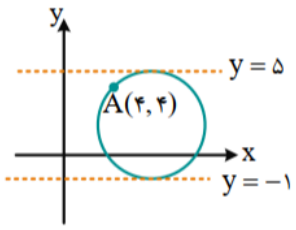
$$x^۲+y^۲-۴x+۶y+\frac{۱}{۲}=۰ \xrightarrow{y=x} x^۲+x^۲-۴x+۶x+\frac{۱}{۲}=۰$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۲x+\frac{۱}{۲}=۰ \Rightarrow ۴x^۲+۴x+۱=۰ \Rightarrow (۲x+۱)^۲=۰$$

$$\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow y=-\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{نقطهٔ تماس}} A(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲}) \xrightarrow{\text{فاصلهٔ از مبدأ}} \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۸۰** از شکل مشخص است که شعاع دایره برابر با نصف فاصله دو خط موازی است:




$$r=\frac{۵-(-۱)}{۲}=۳$$

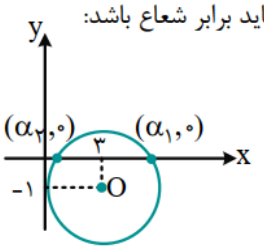
همچنین معلوم است عرض مرکز دایره $\frac{۵+(-۱)}{۲}=۲$ است، بنابراین مرکز را به صورت $O(x,۲)$ در نظر می‌گیریم. فاصله مرکز تا نقطه $A(۴,۴)$ باید برابر شعاع باشد:

$$A(۴,۴),\ O(x,۲) \Rightarrow OA=\sqrt{(x-۴)^۲+(۲-۴)^۲}=۳$$

$$\Rightarrow (x-۴)^۲+۴=۹ \Rightarrow (x-۴)^۲=۵ \Rightarrow x-۴=\pm\sqrt{۵} \Rightarrow x=۴\pm\sqrt{۵}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۸۱** از شکل مشخص است که شعاع دایره ۳ واحد است. اگر تقاطع دایره با محور xها را $A(\alpha,۰)$ در نظر بگیریم، فاصله OA باید برابر شعاع باشد:




$$OA=R \Rightarrow \sqrt{(\alpha-۳)^۲+(۰+۱)^۲}=۳ \Rightarrow (\alpha-۳)^۲+۱=۹$$

$$\Rightarrow (\alpha-۳)^۲=۸ \Rightarrow \alpha-۳=\pm۲\sqrt{۲} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_۱=۳+۲\sqrt{۲}\\ \alpha_۲=۳-۲\sqrt{۲}\end{cases} \Rightarrow \alpha_۱-\alpha_۲=۴\sqrt{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۸۲**

$$x^۲+y^۲-۴x+۲y+m=۰ \Rightarrow O(۲,-۱), r$$

$$(x-۵)^۲+(y+۵)^۲=۱۶ \Rightarrow O'(۵,-۵), r'=۴$$

$$OO'=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵ \xrightarrow{\text{مماس داخل}} OO'=|r-r'| \Rightarrow ۵=|r-۴|$$

$$\Rightarrow r-۴=\pm۵ \Rightarrow r=۹,-۱ \xrightarrow{r>۰} r=۹$$

$$\xrightarrow{\text{مساحت محصور}} \pi r^۲-\pi r'^۲=\pi(۹^۲-۴^۲)=\pi(۸۱-۱۶)=۶۵\pi$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۸۳** باید مجموع هر دو ضلع مثلث از ضلع سوم بزرگ‌تر باشد:

$$x+3x>x^2 \Rightarrow x^2-4x<0 \Rightarrow x(x-4)<0 \xrightarrow{\text{بین دو ریشه}} 0<x<4$$

$$x+x^2>3x \Rightarrow x^2-2x>0 \Rightarrow x(x-2)>0 \xrightarrow{\text{خارج دو ریشه}} x>2 \text{یا} x<0$$

$$3x+x^2>x \Rightarrow x^2+2x>0 \Rightarrow x(x+2)>0 \xrightarrow{\text{خارج دو ریشه}} x>0 \text{ یا } x<-2$$

اشتراک موارد بالا بازه $(2,4)$ است.

$$x\in(2,4) \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x=3 \xrightarrow{\text{اضلاع}} 3,9,9 \xrightarrow{\text{محیط}} 21$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

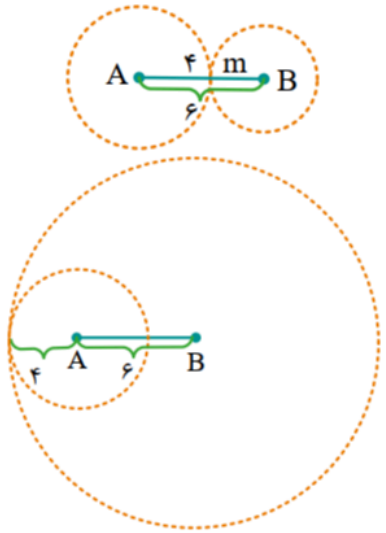
**۱۸۴** با رسم میانه AM، مساحت مثلث نصف می‌شود، پس مساحت مثلث AMB نصف مثلث ABC است. در مثلث AMB نیز مثلث ADF با مثلث AMB با نسبت تشابه $\frac{AD}{AB}=\frac{2}{3}$ متشابه است. پس نسبت مساحت آن‌ها برابر است با:

$$\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle ABM}}=(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9} \Rightarrow \frac{S_{DFMB}}{S_{\triangle ABM}}=\frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow S_{DFMB}=\frac{5}{9}\times(\frac{1}{2}S_{\triangle ABC})=\frac{5}{18}S_{\triangle ABC}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۸۵** دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۴ و دایره‌ای به مرکز B و شعاع m رسم می‌کنیم.
این دو دایره باید یک نقطه مشترک داشته باشند، پس یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:




$$\Rightarrow m+4=6 \Rightarrow m=2$$

$$\Rightarrow m=4+6=10$$

پس مجموع مقادیر m، ۱۲ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۸۶** نسبت اضلاع به یکی از دو حالت زیر است:

$$(1): \frac{6}{b}=\frac{5}{2}=\frac{2}{a} \Rightarrow a=\frac{4}{5}, b=\frac{12}{5} \Rightarrow \text{محیط}=\frac{26}{5}$$

$$(2): \frac{6}{2}=\frac{5}{a}=\frac{2}{b} \Rightarrow a=\frac{5}{3}, b=\frac{2}{3} \Rightarrow \text{محیط}=\frac{13}{3}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۸۷** نسبت اضلاع به یکی از دو حالت زیر است:

$$(۱): \frac{۶}{b}=\frac{۵}{۲}=\frac{۲}{a} \Rightarrow a=\frac{۴}{۵}, b=\frac{۱۲}{۵} \Rightarrow \text{محیط}=\frac{۲۶}{۵}$$

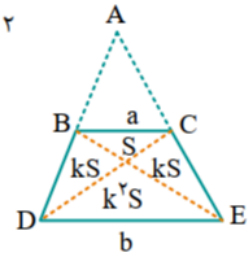
$$(۲): \frac{۶}{۲}=\frac{۵}{a}=\frac{۲}{b} \Rightarrow a=\frac{۵}{۳}, b=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \text{محیط}=\frac{۱۳}{۳}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۸۸** اگر نسبت قاعده‌های یک ذوزنقه $\frac{b}{a}=k$ باشد، توزیع مساحت در آن به صورت زیر است:

$$\frac{S}{k^۲S+۲kS+S}=\frac{۱}{۹} \Rightarrow \frac{۱}{k^۲+۲k+۱}=\frac{۱}{۹} \Rightarrow (k+۱)^۲=۹ \Rightarrow k+۱=۳ \Rightarrow k=۲$$

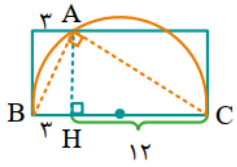
مثلث‌های ABC و ADE متشابه‌اند:




$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}=(\frac{a}{b})^۲=\frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\text{ذوزنقه}}}=\frac{۱}{۳}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

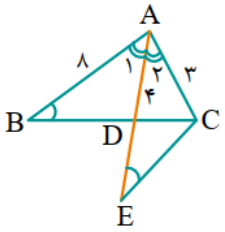
**۱۸۹** BC برابر قطر نیم‌دایره و ۱۵ واحد است. در مثلث ABC زاویه A رو به قطر و قائمه است:




$$AH^۲=BH\times CH \Rightarrow AH^۲=۳\times ۱۲=۳۶$$
$$\Rightarrow AH=۶ \Rightarrow S=AH\times BC=۶\times ۱۵=۹۰$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۹۰**

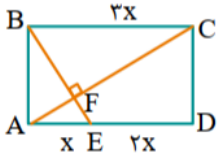



$$\begin{cases}\hat{B}=\hat{E}\\ \hat{A}_۱=\hat{A}_۲\end{cases} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle AEC$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AC}=\frac{BD}{EC} \Rightarrow \frac{۸}{AE}=\frac{۴}{۳} \Rightarrow AE=۶ \Rightarrow DE=۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۹۱** مثلث‌های ABE و ABC متشابه‌اند، پس:



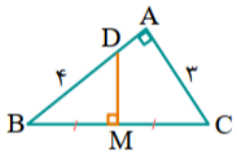

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{x}{AB}=\frac{AB}{۳x} \Rightarrow AB^۲=۳x^۲ \Rightarrow AB=\sqrt{۳}x$$
$$\Rightarrow AC=\sqrt{AB^۲+BC^۲}=\sqrt{۳x^۲+۹x^۲}=۲\sqrt{۳}x$$

مثلث‌های AFE و ACD متشابه‌اند و نسبت تشابه $\frac{AE}{AC}=\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$ است، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها $(\frac{۱}{۲\sqrt{۳}})^۲=\frac{۱}{۱۲}$ است.

بنابراین نسبت مساحت مثلث AEF به مستطیل $\frac{۱}{۲۴}$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۹۲**




از فیثاغورس $BC = ۵$ بوده و در نتیجه $BM = \frac{۵}{۲}$ است.

مثلث‌های DMB و ABC متشابه‌اند:

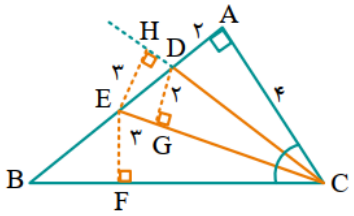
$$\frac{DM}{AC} = \frac{BM}{AB} \Rightarrow \frac{DM}{۳} = \frac{\frac{۵}{۲}}{۴} \Rightarrow DM = \frac{۱۵}{۸}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۹۳**

چون D روی نیمساز زاویه $E\hat{C}A$ است، پس $DG = AD = ۲$ و همچنین E روی نیمساز زاویه $D\hat{C}F$ است، پس $EF = EH = ۳$ است.

مثلث‌های DGC و EHC متشابه‌اند، پس:




$$\frac{EC}{CD} = \frac{EH}{DG} \Rightarrow \frac{EC}{CD} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow EC = \frac{۳}{۲}CD$$

از فیثاغورس در مثلث ACD، داریم:

$$CD = \sqrt{۴^۲ + ۲^۲} = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow EC = \frac{۳}{۲} \times ۲\sqrt{۵} = ۳\sqrt{۵}$$

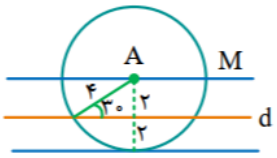
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۱۹۴**

با توجه به آن‌که $\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$، پس فاصله A تا خط d، برابر ۲ واحد است.

دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۴ واحد رسم می‌کنیم. خطوط $d_۱$ و $d_۲$ دایره را در سه نقطه M، $M'$ و $M''$ قطع می‌کنند.

این نقاط روی دایره هستند، پس از A به فاصله ۴ هستند. از طرفی از خط d به فاصله ۲ واحد هستند. پس کلاً ۳ نقطه یافت می‌شود که در شرایط مساله صدق می‌کنند.

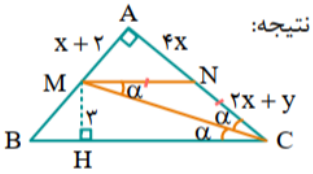



(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۱۹۵**

با توجه به این که CM نیمساز زاویه $\hat{C}$ است، بنابراین مطابق شکل زیر $\hat{C}_۱ = \hat{C}_۲ = \alpha$ از طرفی چهارضلعی MNCB ذوزنقه است، پس $MN \parallel BC$ می‌باشد.

براساس قضیه خطوط موازی و مورب $M\hat{C}B = C\hat{M}N$ است، پس مثلث MNC یک مثلث متساوی‌الساقین است در نتیجه:




$$MN = NC = ۲x + y$$

از طرفی نقطه M روی نیمساز زاویه $\hat{C}$ است، پس فاصله آن از اضلاع AC و BC برابر است لذا:

$$MH = MA \xrightarrow{MH=۳} x + ۲ = ۳ \Rightarrow x = ۱$$

و نیز مثلث AMN در رأس A قائمه است، پس طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$\begin{cases} AN = ۴x = ۴ \\ AM = x + ۲ = ۳ \\ MN = ۲x + y = y + ۲ \end{cases} \Rightarrow MN^۲ = AM^۲ + AN^۲ \Rightarrow (y+۲)^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow y = ۳$$

در نتیجه با داشتن $x = ۱$ و $y = ۳$، حاصل خواسته شده برابر است با:

$$\frac{x - y}{۲y} = \frac{۱ - ۳}{۶} = -\frac{۱}{۳}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۱۹۶** نقطهٔ موردنظر باید هم روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۱۰ و هم روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۶ قرار داشته باشد. چون فقط یک نقطه با این شرایط وجود دارد پس این دو دایره فقط یک نقطهٔ مشترک دارند که به یکی از دو حالت زیر امکان‌پذیر است:



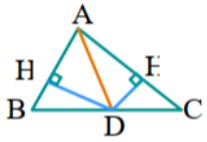

$L = ۱۰ - ۶ = ۴$ $L = ۱۰ + ۶ = ۱۶$

مجموع مقادیر ممکن برای L برابر است با: $۱۶ + ۴ = ۲۰$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۱۹۷** چون D روی نیمساز است، پس فاصله D تا دو ضلع AB و AC برابر است.

فرض می‌کنیم $S_{A\hat{B}D} = S_۱$ و $S_{A\hat{D}C} = S_۲$




$$S_{A\hat{B}C} = ۳S_{A\hat{B}D} \Rightarrow S_۱ + S_۲ = ۳S_۱ \Rightarrow S_۲ = ۲S_۱$$

$$\left.\begin{array}{l} S_۲ = \frac{۱}{۲}DH_۱.AC \\ S_۱ = \frac{۱}{۲}DH_۲.AB \end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{\frac{۱}{۲}}DH_۱.AC = ۲ \times \cancel{\frac{۱}{۲}}DH_۲.AB \Rightarrow AC = ۲$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۱۹۸** **گزاره الف:** مثال نقض دارد، زیرا دو مستطیل به ابعاد ۴×۶ و ۳×۸ هم‌مساحت هستند ولی هم‌نهشت (قابل انطباق) نیستند.

**گزاره ب:** مثال نقض دارد، زیرا ممکن است نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها روی محیط مثلث واقع شود، به عنوان نمونه در مثلث قائم‌الزاویه نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها وسط وتر است.

**گزاره پ:** مثال نقض دارد، زیرا به عنوان نمونه مستطیل یک چهارضلعی است که تمام زوایای آن ۹۰° هستند ولی منتظم نیست.

**گزاره ت:** مثال نقض دارد، زیرا اگر خط d عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، آن‌گاه بی‌شمار نقطه روی خط d می‌توان یافت که از نقاط A و B به یک فاصله هستند.

پس هر چهار گزاره مثال نقض دارند.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۱۹۹** مطابق ویژگی تناسب داریم:

$$\frac{a}{b} = ۶ \Rightarrow a = ۶b$$

$$\frac{a + ۲c}{b + ۳d} = ۶ \Rightarrow \frac{۶b + ۲c}{b + ۳d} = ۶ \Rightarrow ۲c = ۱۸d \Rightarrow c = ۹d$$

پس برای یافتن $\frac{c + ۲d}{d - c}$ کافی است قرار دهیم $c = ۹d$، پس:

$$\frac{c + ۲d}{d - c} = \frac{۹d + ۲d}{d - ۹d} = \frac{۱۱d}{-۸d} = -\frac{۱۱}{۸}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۰۰** در مثلث $\overset{\triangle}{AFC}$ طبق قضیهٔ تالس می‌توان نتیجه گرفت: $EF = ۴$

در مثلث $\overset{\triangle}{BED}$ داریم:

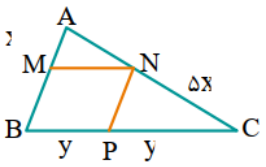
$$\frac{BF}{BE} = \frac{FC}{ED} \Rightarrow \frac{۲}{۲ + ۴} = \frac{۶}{۳ + x} \Rightarrow x = ۱۵$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۰۱**

می‌دانیم: $MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{3x} = \frac{3x}{5x+2} \Rightarrow 5x^2 + 7x + 2 = 9x^2 \Rightarrow 4x^2 - 7x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \checkmark \\ x = -\frac{1}{4} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$




خواهیم داشت:

$$NP \parallel AB \Rightarrow \frac{NC}{AN} = \frac{PC}{BP} \Rightarrow \frac{5x+2}{3x} = \frac{y+8}{y}$$

$$\xrightarrow{x=2} \frac{y+8}{y} = \frac{12}{6} = 2 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow BC = 24$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۰۲**

مطابق تعمیم قضیه تالس، در مثلث $\overset{\triangle}{AHC}$ داریم:

$$\frac{DC}{CH} = \frac{DE}{AH} \Rightarrow \frac{DC}{CH} = \frac{3}{8} \Rightarrow DC = 3x \ , \ CH = 8x$$

توجه داشته باشید که چون مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین است، بنابراین ارتفاع AH میانه نیز هست. پس: $BH = CH = 8x$

مجدد در مثلث $\overset{\triangle}{BDF}$، با فرض $EF = y$ مطابق تعمیم قضیه تالس دایم:

$$\frac{BH}{BD} = \frac{AH}{DF} \Rightarrow \frac{8x}{13x} = \frac{8}{y+3} \Rightarrow y = 10 \Rightarrow EF = 10$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

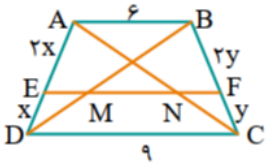
**۲۰۳**

می‌دانیم که $\frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC}$ است، بنابراین می‌توان گفت که پاره‌خط EF

روی ساق‌های ذوزنقه اندازه‌های متناسب ایجاد کرده است، پس با توجه به عکس قضیه تالس در ذوزنقه می‌توان نتیجه گرفت که

$AB \parallel EF \parallel DC$ است، لذا داریم:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} AE = 2x \ , \ AD = 3x \\ BF = 2y, BC = 3y \end{cases}$$




حال به کمک قضیه تالس در دو مثلث ADC و DAB داریم:

$$\begin{cases} \overset{\triangle}{ADC} : EN \parallel DC \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{EN}{DC} \Rightarrow \frac{2x}{3x} = \frac{EN}{9} \Rightarrow EN = 6 \\ \overset{\triangle}{DAB} : EM \parallel AB \Rightarrow \frac{DE}{DA} = \frac{EM}{AB} \Rightarrow \frac{x}{3x} = \frac{EM}{6} \Rightarrow EM = 2 \end{cases}$$

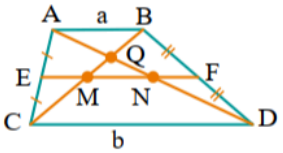
بنابراین، اندازه MN برابر است با:

$$MN = EN - EM = 6 - 2 = 4$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۰۴**

می‌دانیم:



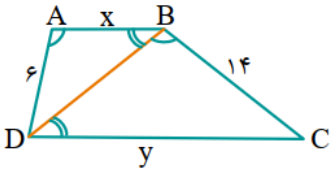

$$\begin{cases} EF = \frac{a+b}{2} \\ MN = \frac{b-a}{2} \end{cases}$$

$$EF = 2MN \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 2(\frac{b-a}{2}) \Rightarrow a + b = 2b - 2a \Rightarrow b = 3a$$

دو مثلث $\overset{\triangle}{AQB}$ و $\overset{\triangle}{CQD}$ متشابه می‌باشند ونسبت تشابه آن‌ها برابر $\frac{b}{a} = 3$ است. بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر $(\frac{b}{a})^2 = 9$ می‌باشد.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۰۵** چون $AB \parallel CD$، پس بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $B\hat{D}C = D\hat{B}A$. پس دو زاویه از مثلث ABD با دو زاویه از مثلث BCD برابرند و این مثلث‌ها متشابه‌اند. بنابراین:




$$\left.\begin{matrix} B\hat{D}C = D\hat{B}A \\ D\hat{B}C = D\hat{A}B \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} A\overset{\triangle}{B}D \sim B\overset{\triangle}{C}D$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AD}{BC} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{۲x+۱}{y} = \frac{۶}{۱۴} = \frac{x}{۲x+۱}$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ بالا x را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۶}{۱۴} = \frac{x}{۲x+۱} \Rightarrow \frac{۳}{۷} = \frac{x}{۲x+۱} \Rightarrow ۶x+۳ = ۷x \Rightarrow x = ۳$$

حال با داشتن $x = ۳$، مقدار y را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۲x+۱}{y} = \frac{۶}{۱۴} \Rightarrow \frac{۲x+۱}{y} = \frac{۳}{۷} \Rightarrow ۳y = ۷(۲x+۱) \Rightarrow y = \frac{۷(۲x+۱)}{۳} \xrightarrow{x=۳} y = \frac{۷(۲\times ۳+۱)}{۳} \Rightarrow y = \frac{۴۹}{۳}$$

سرانجام خواستهٔ سوال برابر است با:

$$\Rightarrow xy = ۳\times\frac{۴۹}{۳} = ۴۹$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

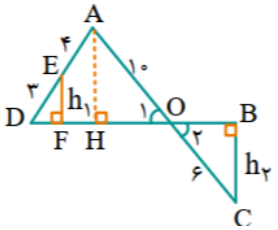
**۲۰۶** ارتفاع AH از مثلث OAD را رسم می‌کنیم و سپس با توجه به تعمیم قضیه تالس در مثلث ADH داریم:

$$EF \parallel AH \Rightarrow \frac{EF}{AH} = \frac{DE}{DA} \Rightarrow \frac{EF}{AH} = \frac{۳}{۷} \Rightarrow \frac{h_۱}{AH} = \frac{۳}{۷} \quad (I)$$

از طرفی:

$$\left.\begin{matrix} \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \\ \hat{H} = \hat{B} = ۹۰^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow O\overset{\triangle}{B}C \sim A\overset{\triangle}{O}H \Rightarrow \frac{BC}{AH} = \frac{OC}{OA} \Rightarrow \frac{BC}{AH} = \frac{۶}{۱۰} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{h_۲}{AH} = \frac{۳}{۵} \quad (II)$$

در نتیجه به کمک روابط (I) و (II) داریم:



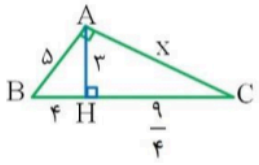

$$\frac{\frac{h_۲}{AH}}{\frac{h_۱}{AH}} = \frac{\frac{۳}{۵}}{\frac{۳}{۷}} \Rightarrow \frac{h_۲}{h_۱} = \frac{۷}{۵} = ۱/۴$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۰۷** در مثلث قائم‌الزاویه $A\overset{\triangle}{B}H$ داریم:

$$AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ \xrightarrow[AH=۳]{AB=۵} BH = ۴$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه $A\overset{\triangle}{B}C$ خواهیم داشت:




$$AB^۲ = BH\times BC \xrightarrow[BH=۴]{AB=۵} ۲۵ = ۴\times BC \Rightarrow BC = \frac{۲۵}{۴}$$

$$HC = BC - BH \Rightarrow HC = \frac{۲۵}{۴} - ۴ = \frac{۹}{۴}$$

$$AC^۲ = HC\times CB = \frac{۹}{۴}\times\frac{۲۵}{۴} = \frac{۲۲۵}{۱۶} \Rightarrow AC = \frac{۱۵}{۴}$$

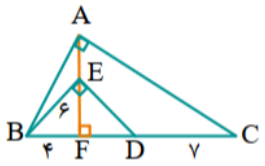
(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۰۸** ابتدا به کمک روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه BED ، داریم:

$$EB^۲ = BF \times BD$$

$$۳۶ = ۴ \times BD \Rightarrow BD = ۹ \xrightarrow{BF=۴} FD = ۵$$

از طرفی، در مثلث قائم‌الزاویه ABC نیز داریم:




$$\begin{cases} AC^۲ = CF \times BC \\ CF = ۷ + ۵ = ۱۲ \Rightarrow AC = \sqrt{۱۲ \times ۱۶} = ۸\sqrt{۳} \\ BC = ۱۶ \end{cases}$$

$$AF^۲ = BF \times FC \Rightarrow AF = \sqrt{۴ \times ۱۲} = ۴\sqrt{۳}$$

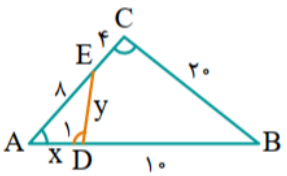
در نتیجه:

$$AC - AF = ۸\sqrt{۳} - ۴\sqrt{۳} = ۴\sqrt{۳}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۰۹** دو زاویه از مثلث ADE با دو زاویه از مثلث ABC برابرند (زاویهٔ A مشترک است و $\hat{C} = \hat{D}_۱$). بنابراین این دو مثلث متشابه‌اند. پس:

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{y}{۲۰} = \frac{۸}{x+۱۰} = \frac{x}{۸+۴} \Rightarrow \frac{y}{۲۰} = \frac{۸}{x+۱۰} = \frac{x}{۱۲}$$




اکنون با استفاده از رابطهٔ بالا x را به دست می‌آوریم.

$$\frac{۸}{x+۱۰} = \frac{x}{۱۲} \Rightarrow x^۲ + ۱۰x = ۱۲ \times ۸ \Rightarrow x^۲ + ۱۰x - ۹۶ = ۰ \Rightarrow (x-۶)(x+۱۶) = ۰ \Rightarrow x = ۶$$

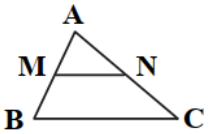
حال با داشتن مقدار $x = ۶$، مقدار y را به دست می‌آوریم.

$$\frac{y}{۲۰} = \frac{x}{۱۲} \Rightarrow ۱۲y = ۲۰x \Rightarrow ۱۲y = ۲۰ \times ۶ \Rightarrow y = ۱۰$$

بنابراین: $x + y = ۱۶$

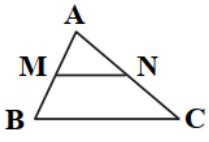
(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۱۰**




**نکته (قضیهٔ تالس): در مثلث روبه‌رو، اگر $MN \parallel BC$، آنگاه:**

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$




**نکته (تعمیم قضیهٔ تالس): در مثلث روبه‌رو، اگر $MN \parallel BC$، آنگاه:**

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

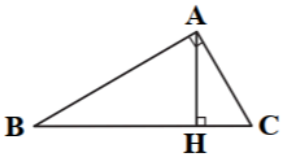
$$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \frac{۲x}{۱۰x - ۳y} = \frac{۵}{۱۵} \Rightarrow ۶x = ۱۰x - ۳y \Rightarrow ۴x = ۳y \quad (*)$$

$$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{x}{y+۲} = \frac{۵}{۱۰} \Rightarrow ۲x = y + ۲ \xrightarrow{(*)} \begin{cases} x = ۳ \\ y = ۴ \end{cases}$$

**بنابراین $x + y = ۷$.**

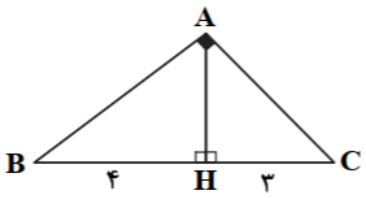
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۱۱** نکته: در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC$، اگر $AH$ ارتفاع وارد بر وتر باشد، داریم:




$$AB^2 = BH \times BC \qquad BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$AC^2 = CH \times BC \qquad AB \times AC = AH \times BC$$
$$AH^2 = BH \times CH$$

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:




$$\begin{cases} AH^2 = BH \times CH = ۴ \times ۳ = ۱۲ \Rightarrow AH = ۲\sqrt{۳} \\ AC^2 = CH \times BC = ۳ \times ۷ = ۲۱ \Rightarrow AC = \sqrt{۲۱} \end{cases}$$

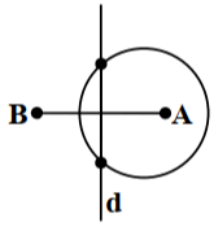
بنابراین:

$$\frac{AH}{AC} = \frac{۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۲۱}} = \frac{۲}{\sqrt{۷}} = \frac{۲\sqrt{۷}}{۷}$$

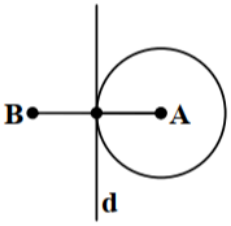
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۱۲** نکته: هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه‌ای که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد روی عمودمنصف آن پاره‌خط است.

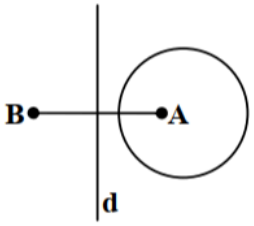
باید نقاطی را پیدا کنیم که از نقاط $A$ و $B$ به یک فاصله باشند و روی دایرهٔ $C$ نیز قرار داشته باشند. پس باید محل برخورد خط $d$ عمودمنصف $AB$ را با دایرهٔ $C$ به‌دست آوریم. دایرهٔ $C$ با خط $d$ یا برخورد نمی‌کند یا بر آن مماس است یا آن را در دو نقطه قطع می‌کند. پس مسئله حداکثر دو جواب دارد.




مسئله دو جواب دارد.
(۳)




مسئله یک جواب دارد.
(۲)



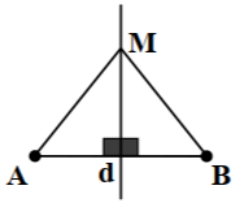

مسئله جواب ندارد.
(۱)

دقت کنید که شعاع دایره و جایگاه نقاط $A$ و $B$ نسبت به دایره در حل این مسئله تأثیری نمی‌گذارد.

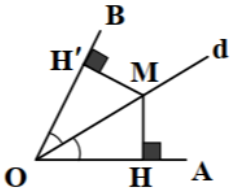
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۱۳** **نکته: هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط از دو سر آن به یک فاصله است و برعکس.**

**نکته: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن به یک فاصله است و برعکس.**

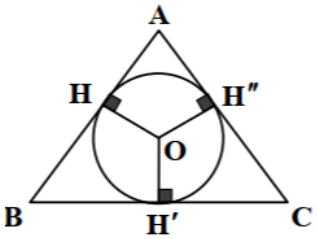



$MA = MB \Leftrightarrow d$ عمودمنصف




$MH = MH' \Leftrightarrow d$ نیمساز $A\hat{O}B$

**اگر مرکز دایرهٔ $C$ نقطهٔ $O$ و شعاع آن $r$ باشد، با توجه به اینکه شعاع بر خط مماس در نقطهٔ تماس عمود است، داریم:**



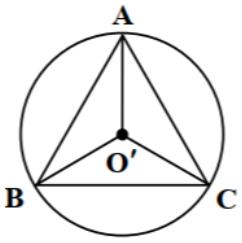

مرکز دایرهٔ $C$ محل برخورد نیمسازهاست. $\Rightarrow$

$r = OH = OH' \Rightarrow H\hat{B}H'$ روی $O$ نیمساز

$r = OH' = OH'' \Rightarrow H'\hat{C}H''$ روی $O$ نیمساز

$r = OH'' = OH \Rightarrow H''\hat{A}H$ روی $O$ نیمساز

**اگر شعاع دایرهٔ $C'$ برابر $r'$ و مرکز آن $O'$ باشد، داریم:**




مرکز دایرهٔ $C'$ محل برخورد عمودمنصف اضلاع است. $\Rightarrow$

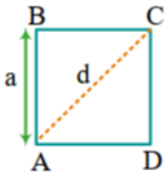
$O'A = O'B = r' \Rightarrow AB$ روی $O'$ عمودمنصف

$O'B = O'C = r' \Rightarrow BC$ روی $O'$ عمودمنصف

$O'C = O'A = r' \Rightarrow AC$ روی $O'$ عمودمنصف

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

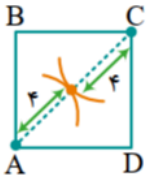
**۲۱۴** اگر اندازه ضلع مربع را $a$ و قطر آن را $d$ در نظر بگیریم خواهیم داشت:




$S = a^2 = 32 \Rightarrow a = \sqrt{32}$

$d = a\sqrt{2} = \sqrt{32} \times \sqrt{2} = \sqrt{64} = 8$

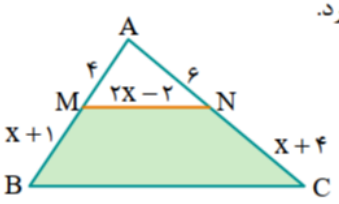
نقاط به فاصله ۴ واحد از $A$ روی دایره‌ای به مرکز $A$ و شعاع ۴ و نقاط به فاصله ۴ واحد از $C$ روی دایره‌ای به مرکز $C$ و شعاع ۴ قرار دارند.



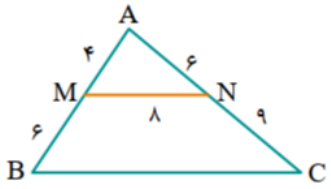

حال چون این دو دایره بر هم مماس‌اند، پس یک نقطه با این شرایط وجود دارد.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۱۵** از آن‌جایی که MNCB ذوزنقه است پس $MN \parallel BC$ و می‌توان در مثلث ABC از قضیه تالس استفاده کرد.
در ابتدا با استفاده از تالس جزء به جزء پارامتر x را به‌دست می‌آوریم:




$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow\frac{۴}{x+۱}=\frac{۶}{x+۴}\Rightarrow ۶x+۶=۴x+۱۶\Rightarrow ۲x=۱۰\Rightarrow x=۵$$

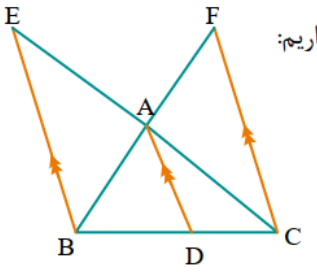



$$\xrightarrow{\text{تالس جزء به کل}}\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow\frac{۴}{۱۰}=\frac{۸}{BC}\Rightarrow BC=۲۰$$

محیط ذوزنقه $=۶+۸+۹+۲۰=۴۳$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۱۶** با توجه به شکل مقابل، داریم:




$$\overset{\Delta}{BEC}: AD \parallel BE \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{BE}=\frac{CD}{BC}\Rightarrow\frac{۱}{BE}=\frac{CD}{AD.BC}\quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{BCF}: AD \parallel CF \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{CF}=\frac{BD}{BC}\Rightarrow\frac{۱}{CF}=\frac{BD}{AD.BC}$$

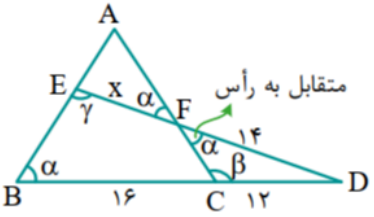
$$(۱),(۲)\Rightarrow\frac{۱}{BE}+\frac{۱}{CF}=\frac{CD}{AD.BC}+\frac{BD}{AD.BC}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{BE}+\frac{۱}{CF}=\frac{CD+BD}{AD.BC}\Rightarrow\frac{۱}{BE}+\frac{۱}{CF}=\frac{BC}{AD.BC}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{BE}+\frac{۱}{CF}=\frac{۱}{AD}\Rightarrow\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱}{AD}\Rightarrow\frac{۳+۴}{۴۸}=\frac{۱}{AD}\Rightarrow AD=\frac{۴۸}{۷}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۱۷** می‌دانیم مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است، بنابراین:




$$\overset{\Delta}{FCD}: \alpha+\beta+\hat{D}=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow\beta=\gamma\Rightarrow \text{دو مثلث } EBD \text{ و } FCD \text{ متشابه‌اند}$$

$$\overset{\Delta}{EBD}: \alpha+\gamma+\hat{D}=۱۸۰^\circ$$

نسبت تشابه: $\frac{۱۲}{x+۱۴}=\frac{۱۴}{۱۶+۱۲}\Rightarrow\frac{۱۲}{x+۱۴}=\frac{۱۴}{۲۸}\Rightarrow x+۱۴=۲۴\Rightarrow x=EF=۱۰$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۱۸** دو ضلع AB و DC با هم موازی‌اند. بنابراین هر خط عمود بر یکی از این دو خط، بر دیگری نیز عمود است. پس: $H\hat{A}B = ۹۰^\circ$

و مثلث ABH در رأس A قائمه است، پس طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABH داریم:

$$AH^۲ = HM \times BH \Rightarrow \left(۲\sqrt{۱۳}\right)^۲ = HM \times (۹ + HM)$$

$$\Rightarrow ۵۲ = HM \times (۹ + HM) \Rightarrow HM = ۴$$

$$AB^۲ = BM \times BH \Rightarrow AB = \sqrt{۹ \times (۹ + ۴)} = ۳\sqrt{۱۳}$$

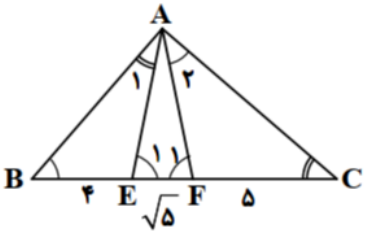
حال مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD برابر است با:

$$S_{ABCD} = AB \times AH = ۳\sqrt{۱۳} \times ۲\sqrt{۱۳} = ۶ \times ۱۳ = ۷۸$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۱۹** **نکته: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشد، دو مثلث متشابه‌اند.**

**دو مثلث ABE و AFC متشابه‌اند؛ زیرا:**




$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{A}_۲ \\ \hat{C} = \hat{A}_۱ \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABE} \sim \overset{\triangle}{AFC} \Rightarrow \frac{BE}{AF} = \frac{AE}{FC} \qquad (I)$$

**از طرفی می‌دانیم زاویهٔ خارجی هر مثلث برابر است با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن.**

**بنابراین:**

$$\begin{cases} \hat{E}_۱ = \hat{A}_۱ + \hat{B} \\ \hat{F}_۱ = \hat{A}_۲ + \hat{C} \end{cases} \xrightarrow[\hat{A}_۲ = \hat{B}]{\hat{A}_۱ = \hat{C}} \hat{E}_۱ = \hat{F}_۱ \Rightarrow \text{.متساوی‌الساقین است} \overset{\triangle}{AEF} \Rightarrow AE = AF \qquad (II)$$

$$(I) \text{ و } (II) \Rightarrow \frac{BE}{AE} = \frac{AE}{FC} \Rightarrow AE^۲ = BE \cdot FC$$

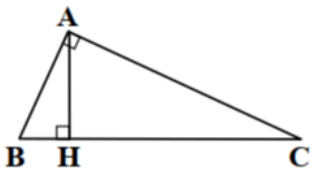
**بنابراین داریم:**

$$AE^۲ = ۴ \times ۵ \Rightarrow AE = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow AF = ۲\sqrt{۵}$$

$$\text{محیط مثلث } AEF = ۲\sqrt{۵} + ۲\sqrt{۵} + \sqrt{۵} = ۵\sqrt{۵}$$

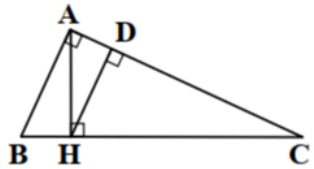
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۲۰** **نکته: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که AH ارتفاع وارد بر وتر است داریم:**




$$\begin{cases} AH^۲ = BH \times CH \ , \ AB^۲ = BH \times BC \ , \ AC^۲ = CH \times BC \\ \overset{\triangle}{AHC} \sim \overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{ABC} \end{cases}$$

**ابتدا با توجه به داده‌های مسئله، شکل را رسم می‌کنیم.**




$$\overset{\triangle}{ABC} : AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \Rightarrow BC = ۱۰$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} AB \times AC = \frac{۱}{۲} AH \times BC \Rightarrow ۶ \times ۸ = ۱۰ \times AH \Rightarrow AH = ۴/۸$$

$$\overset{\triangle}{ABC} : AC^۲ = CH \times BC \Rightarrow ۶۴ = CH \times ۱۰ \Rightarrow CH = \frac{۶۴}{۱۰} = ۶/۴$$

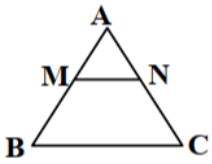
$$S_{\overset{\triangle}{AHC}} = \frac{۱}{۲} AH \times HC = \frac{۱}{۲} HD \times AC \Rightarrow ۴/۸ \times ۶/۴ = ۸\,HD \Rightarrow HD = \frac{۴/۸ \times ۶/۴}{۸}$$

$$\Rightarrow HD = ۴/۸ \times ۰/۸ \Rightarrow \frac{HD}{AH} = \frac{۴/۸ \times ۰/۸}{۴/۸} = ۰/۸$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

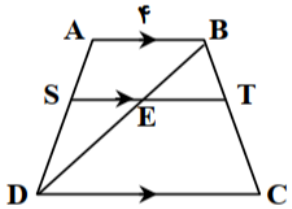
۲۲۱

نکته: در مثلث ABC داریم:




$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

نکته: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$




$$۳AS=۲SD \Rightarrow \frac{SD}{AS}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{SD}{AS+SD}=\frac{۳}{۳+۲} \Rightarrow \frac{SD}{AD}=\frac{۳}{۵} \quad (*)$$

$$\overset{\triangle}{ABD}: SE \parallel AB \Rightarrow \frac{SD}{AD}=\frac{SE}{AB} \xrightarrow{(*)} \frac{۳}{۵}=\frac{SE}{۴} \Rightarrow SE=\frac{۱۲}{۵}$$

$$AB \parallel ST \parallel DC \Rightarrow \frac{AS}{SD}=\frac{BT}{TC} \xrightarrow{\frac{AS}{SD}=\frac{۲}{۳}} \frac{BT}{TC}=\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{BT}{BT+TC}=\frac{۲}{۲+۳} \Rightarrow \frac{BT}{BC}=\frac{۲}{۵} \quad (**)$$

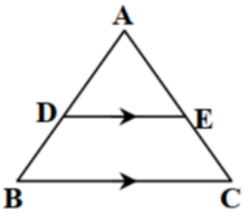
$$\overset{\triangle}{BCD}: ET \parallel DC \Rightarrow \frac{BT}{BC}=\frac{ET}{DC} \xrightarrow{(**)} \frac{۲}{۵}=\frac{ET}{۷} \Rightarrow ET=\frac{۱۴}{۵}$$

$$ST=SE+ET=\frac{۱۲}{۵}+\frac{۱۴}{۵}=\frac{۲۶}{۵}=۵/۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۲۲

نکته: اگر در مثلث ABC، پاره‌خط DE موازی ضلع BC باشد، آنگاه $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ و برعکس.




ابتدا داریم:

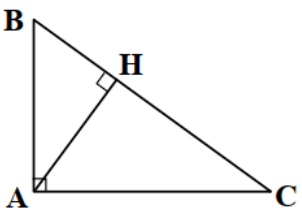
$$\overset{\triangle}{ABM}: \frac{AE}{EB}=\frac{AN}{NM} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} EN \parallel BM \Rightarrow EF \parallel BC$$

اکنون با استفاده از قضیهٔ تالس در مثلث ABC داریم:

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{x}{۲}=\frac{۵}{x-۳} \Rightarrow x^{۲}-۳x=۱۰ \Rightarrow x^{۲}-۳x-۱۰=۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۲)=۰ \xrightarrow{x>۰} x=۵$$

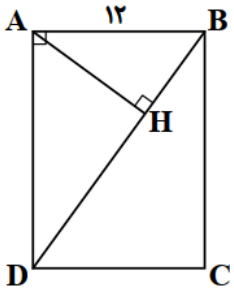
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۲۳** نکته: در مثلث قائم‌الزاویه، اگر ارتفاع وارد بر وتر را رسم کنیم، داریم:




$$AB^2 = BH \cdot BC$$
$$AC^2 = CH \cdot BC$$
$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABD$، $AH$ ارتفاع وارد بر وتر است و داریم:

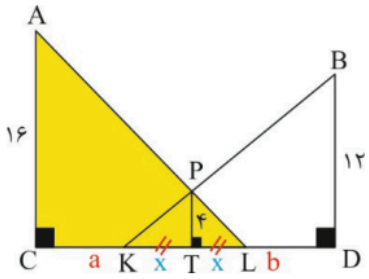



$$AB^2 = BH \cdot BD \Rightarrow ۱۲^2 = ۸ \times BD \Rightarrow BD = \frac{۱۴۴}{۸} = ۱۸$$
$$\Rightarrow AD^2 + AB^2 = BD^2 \Rightarrow AD^2 + ۱۲^2 = ۱۸^2$$
$$\Rightarrow AD^2 = ۱۸^2 - ۱۲^2 = (۱۸-۱۲)(۱۸+۱۲) = ۶ \times ۳۰ = ۱۸۰$$
$$AD = ۶\sqrt{۵}$$
$$\text{محیط مستطیل} = ۲(AB + AD) = ۲(۱۲ + ۶\sqrt{۵}) = ۲۴ + ۱۲\sqrt{۵}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۲۴** **سرنخ** در هر مثلث تالس را پیدا کنید.

یک بار در مثلث $ACL$ و یک بار هم در مثلث $BDK$ از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم:



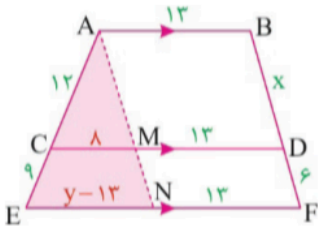

$$\text{مثلث } ACL: \frac{۴}{۱۶} = \frac{x}{۲x+a} \Rightarrow ۲x + a = ۴x \Rightarrow a = ۲x$$
$$\text{مثلث } BDK: \frac{۴}{۱۲} = \frac{x}{۲x+b} \Rightarrow ۲x + b = ۳x \Rightarrow b = x$$

از طرفی طبق صورت سؤال $CD = ۴۰$ است، پس:

$$a + ۲x + b = ۴۰ \Rightarrow ۲x + ۲x + x = ۴۰ \Rightarrow x = ۸ \Rightarrow CT = a + x = ۳x = ۲۴$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۲۵** می‌دانیم که چهار پاره خط ایجاد شده روی ساق‌های ذوزنقه توسط $CD$ ، طبق تالس متناسب اند، یعنی:



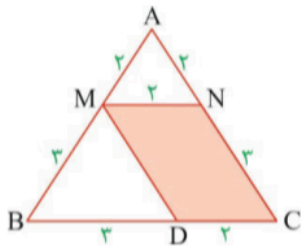

$$\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF} \Rightarrow \frac{۱۲}{۹} = \frac{x}{۶} \Rightarrow x = ۸$$

حال از رأس $A$ خطی به موازات ساق $BF$ رسم می‌کنیم و با استفاده از تالس جزء به کل در مثلث $AEN$ داریم:

$$\frac{۱۲}{۱۲+۹} = \frac{۸}{y-۱۳} \Rightarrow y - ۱۳ = ۱۴ \Rightarrow y = ۲۷ \Rightarrow x + y = ۳۵$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

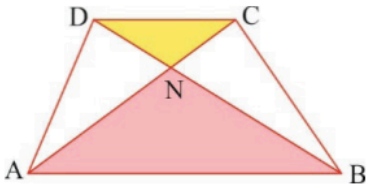
**۲۲۶** چون نسبت پاره‌خط‌ها، داده شده و نسبت مساحت‌ها را می‌خواهیم، فرض می‌کنیم مثلث $ABC$ یک مثلث متساوی الاضلاع است و $AM = ۲$ و $MB = ۳$ باشد، در این صورت خواهیم داشت:




$$\frac{S_{MNCD}}{S_{ABC}} = \frac{۳ \times ۲ \times \sin\hat{C}}{\frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۵ \times \sin\hat{C}} = \frac{۱۲}{۲۵} = ۰/۴۸$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۲۷** اگر نسبت تشابه دو مثلث ABN و DNC برابر k باشد، داریم:




$$k^۲=\frac{S_{ABN}}{S_{DNC}}\Rightarrow k^۲=\frac{۲۷}{۱۲}=\frac{۹}{۴}\Rightarrow k=\frac{۳}{۲}\rightarrow S_{BCN}=KS_{DNC}$$

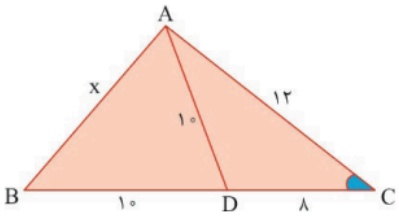
$$\Rightarrow S_{BCN}=S_{AND}=\frac{۳}{۲}\times ۱۲=۱۸$$

$$S_{ABCD}=S_{BCN}+S_{ABN}+S_{DNC}+S_{AND}=۱۲+۲۷+۱۸+۱۸=۷۵$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۲۸** **سرنخ** تشابه مثلث ABC را با مثلث‌های کناری بررسی کنید.

در دو مثلث ABC و ACD داریم:



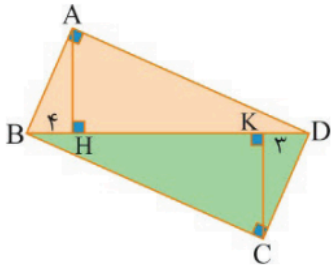

$$\frac{CD}{AC}=\frac{AC}{BC}\Rightarrow\frac{۸}{۱۲}=\frac{۱۲}{۱۸}=\frac{۲}{۳}$$

پس مطابق شکل این دو مثلث در رأس $\hat{C}$ مشترک بوده و اضلاع نظیر آن متناسب‌اند، در نتیجه با نسبت تشابه $k=\frac{۲}{۳}$ متشابه‌اند:

$$k=\frac{AD}{AB}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{۱۰}{x}\Rightarrow x=۱۵$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۲۹** با فرض $BD=x$ در مثلث‌های ABD و BCD داریم:



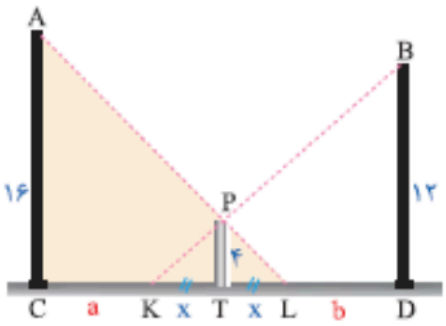

$$\triangle ABD: AB^۲=BH\times BD=۴x$$

$$\triangle BCD: CD^۲=KD\times BD=۳x$$

$$\Rightarrow\frac{CD^۲}{AB^۲}=\frac{۳x}{۴x}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{CD}{AB}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۳۰** **سرنخ** قضیه تالس را در دو مثلث بزرگ به کار برده و LD و CK را به دست آورید.




یک بار در مثلث ACL و یک بار هم در مثلث BDK از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم.

$$\text{ACL مثلث}: \frac{۴}{۱۶}=\frac{x}{۲x+a}\Rightarrow ۲x+a=۴x\Rightarrow a=۲x$$

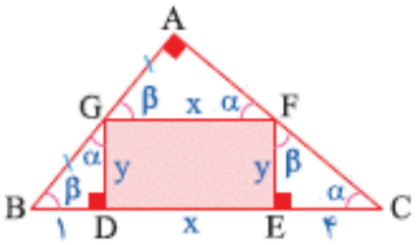
$$\text{BDK مثلث}: \frac{۴}{۱۲}=\frac{x}{۲x+b}\Rightarrow ۲x+b=۳x\Rightarrow b=x$$

از طرفی طبق صورت سؤال $CD=۴۰m$ است، پس:

$$a+۲x+b=۴۰\Rightarrow ۲x+۲x+x=۴۰\Rightarrow x=۸\Rightarrow CT=a+x=۳x=۲۴$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۳۱** **سرنخ** تالس جزء به کل را در مثلث ABC به کار برده و طول ضلع مستطیل را بیابید. عرض مستطیل از تشابه مثلث‌های کناری به‌دست می‌آید.




ابتدا با استفاده از تالس جزء به کل در مثلث ABC داریم:

$$\frac{AG}{AB}=\frac{GF}{BC}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{x}{x+۵}\Rightarrow x=۵$$

حال مطابق شکل مثلث‌های EFC و BGD متشابه‌اند، پس:

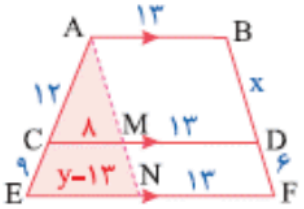
$$\frac{GD}{EC}=\frac{BD}{FE}\Rightarrow\frac{y}{۴}=\frac{۱}{y}\Rightarrow y=۲$$

پس محیط مستطیل GFED برابر است با:

$$۲(x+y)=۲(۲+۵)=۱۴$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۳۲** می‌دانیم که چهار پاره‌خط ایجاد شده روی ساق‌های ذوزنقه توسط CD، طبق تالس متناسب‌اند، یعنی:



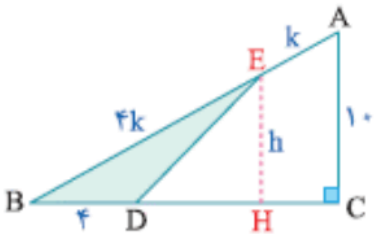

$$\frac{AC}{CE}=\frac{BD}{DF}\Rightarrow\frac{۱۲}{۹}=\frac{x}{۶}\Rightarrow x=۸$$

حال از رأس A خطی به موازات ساق BF رسم می‌کنیم و با استفاده از تالس جزء به کل در مثلث AEN داریم:

$$\frac{۱۲}{۱۲+۹}=\frac{۸}{y-۱۳}\Rightarrow y-۱۳=۱۴\Rightarrow y=۲۷\Rightarrow x+y=۳۵$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۳۳** **سرنخ** از نقطهٔ E خطی موازی ضلع AC رسم کرده و از قضیه تالس استفاده کنید.



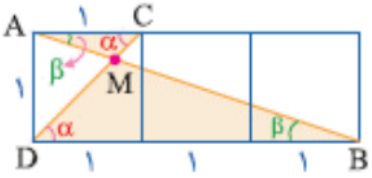

از نقطهٔ E خطی بر ضلع BC عمود می‌کنیم. حال از آن جایی که EH و AC موازی‌اند. با استفاده از تالس جزء به کل داریم:

$$\frac{BE}{BA}=\frac{EH}{AC}\Rightarrow\frac{۴k}{۵k}=\frac{h}{۱۰}\Rightarrow h=۸$$

$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}BD\times h=\frac{۱}{۲}\times۴\times۸=۱۶$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۳۴** **سرنخ** نسبت تشابه را برای دو مثلث بالایی و پایینی بنویسید.




ابتدا با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس وتر مثلث ADإ برابر $\sqrt{۱۰}$ به دست می‌آید.

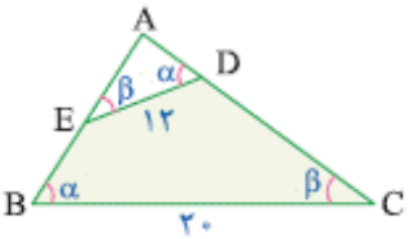
اگر فرض کنیم $MA=x$ باشد پس طول $MB=\sqrt{۱۰}-x$ خواهد بود. مطابق شکل مثلث‌های AMC و DMB متشابه‌اند، در نتیجه:

$$\frac{AC}{BD}=\frac{MA}{MB}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{x}{\sqrt{۱۰}-x}\Rightarrow۴x=\sqrt{۱۰}\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۰}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۳۵ **سرنخ** نسبت تشابه دو مثلث مشابه AED و ABC را به دست آورده و نسبت مساحت‌ها را حساب کنید.

چون زوایای روبه‌رو در چهارضلعی مکمل یکدیگرند. پس زوایای نشـــان داده شـــده در شـــکل با هم برابرند و در نتیجه مثلث‌های ABC و AED با هم متشابه‌اند و نسبت مساحت آن‌ها برابر است با:



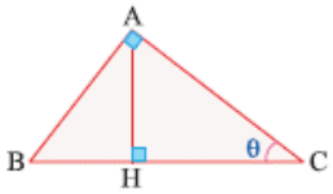

$$\frac{S_{AED}}{S_{ABC}}=\left(\frac{۱۲}{۲۰}\right)^{۲}=\frac{۹}{۲۵}\xrightarrow{\text{فرض می کنیم}}\begin{cases}S_{AED}=۹S\\ S_{EDCB}=۱۶S\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{S_{EDCB}}{S_{ABC}}=\frac{۱۶S}{۲۵S}=۰/۶۴$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۳۶ **سرنخ** با استفاده از روابط نسبت‌های مثلثاتی در قائم‌الزاویه، طول اضلاع قائم و ارتفاع AH را به دست آورید.

در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:




$$\sin\theta=\frac{AB}{BC}\Rightarrow AB=۲\sin\theta$$

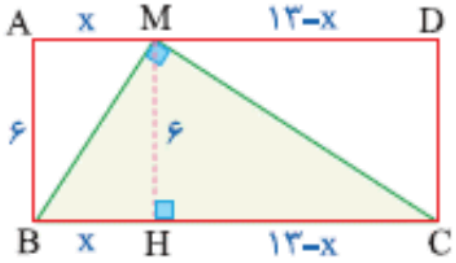
$$\cos\theta=\frac{AC}{BC}\Rightarrow AC=۲\cos\theta$$

$$AH=\frac{AB\times AC}{BC}\Rightarrow AH=\frac{(۲\sin\theta)(۲\cos\theta)}{۲}=۲\sin\theta\cos\theta\Rightarrow AH=\sin۲\theta$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۳۷ **سرنخ** بعد از رسم شکل، با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه، خواسته مسئله به راحتی قابل محاسبه است.

با توجه به مسئله شکل مقابل حاصل می‌شود و در مثلث قائم‌الزاویه BMC داریم:




$$MH^{۲}=BH\times CH\Rightarrow ۶^{۲}=(x)\times(۱۳-x)$$

$$\Rightarrow\underbrace{x^{۲}-۱۳x+۳۶}_{(x-۴)(x-۹)}=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۴\checkmark\\ x=۹\times\end{cases}$$

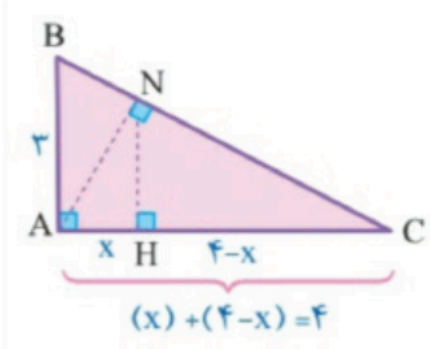
(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۳۸** **سرنخ** با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه، طول وتر و ارتفاع وارد بر وتر به راحتی قابل محاسبه بوده و سپس x را بیابید.

با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس وتر BC برابر ۵ به دست می‌آید. حال ارتفاع AN را در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC به دست می‌آوریم:

$$AN=\frac{AB\times AC}{BC}=\frac{۳\times ۴}{۵}=\frac{۱۲}{۵}$$

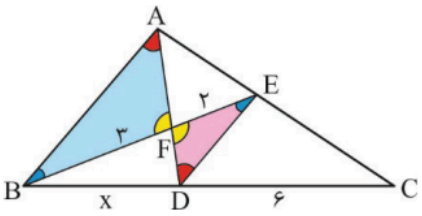
حال در مثلث قائم الزاویهٔ ANC داریم:




$$AN^۲=AH\times AC\Rightarrow\left(\frac{۱۲}{۵}\right)^۲=(x)\times(۴)\Rightarrow x=\frac{۳۶}{۲۵}=۱/۴۴$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۳۹** مطابق شکل مثلث‌های ABF و DEF متشابه هستند، پس:




$$\frac{DE}{AB}=\frac{EF}{BF}\Rightarrow\frac{DE}{AB}=\frac{۲}{۳}$$

با استفاده از تالس جز به کل در مثلث ABC داریم:

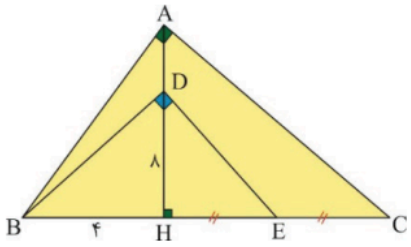
$$\frac{CD}{BC}=\frac{DE}{AB}\Rightarrow\frac{۶}{۶+x}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۲x+۱۲=۱۸\Rightarrow x=۳$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۴۰** در مثلث قائم الزاویهٔ BDE داریم:

$$DH^۲=BH\times EH\Rightarrow ۸^۲=۴\times HE\Rightarrow HE=۱۶$$

پس $EH=CE=۱۶$ می‌باشد و در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

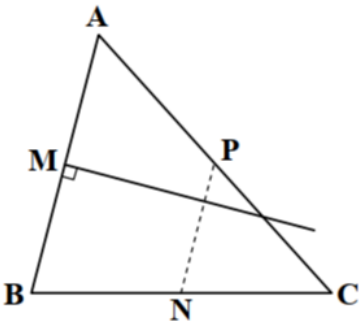



$$AH^۲=BH\times CH\Rightarrow AH^۲=۴\times(۱۶+۱۶)=۴\times ۳۲\Rightarrow AH=۸\sqrt{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۴۱** نکته: دو خطِ غیرموازی با محورهای مختصات بر هم عمودند، هرگاه حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها برابر $(-۱)$ باشد؛ یعنی اگر شیب‌های دو خط $m$ و $m'$ باشد، آنگاه شرط عمود بودن آن‌ها آن است که $mm' = -۱$؛ به عبارت دیگر شیب هر کدام، قرینهٔ معکوس شیب دیگری باشد.

نکته: مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AB عبارت است از $M(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲})$.




نقطهٔ P وسط AC و نقطهٔ N وسط BC است، پس $\frac{PC}{AP} = \frac{CN}{BN} = ۱$. از عکس قضیهٔ تالس نتیجه می‌گیریم $AB \parallel PN$. پس شیب AB با شیب PN برابر است.

$$m_{AB} = m_{PN} = \frac{-۸ - (-۵)}{-۲ - ۰} = \frac{-۳}{-۲} = \frac{۳}{۲}$$

بنابراین شیب عمودمنصف AB برابر $\frac{-۱}{\frac{۳}{۲}} = -\frac{۲}{۳}$ و معادلهٔ آن به‌صورت $y = -\frac{۲}{۳}x + b$ است.

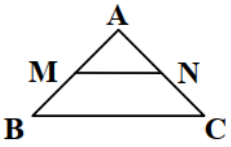
خط عمودمنصف از نقطهٔ $M(-۳, ۱)$ (وسط پاره‌خط AB) می‌گذرد، بنابراین:

$$۱ = -\frac{۲}{۳} \times (-۳) + b \Rightarrow b = -۱$$

$$\Rightarrow \text{معادلهٔ عمودمنصف AB}: y = -\frac{۲}{۳}x - ۱ \Rightarrow ۳y + ۲x + ۳ = ۰$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۴۲** نکتهٔ ۱ (تعمیم قضیهٔ تالس): اگر خط MN موازی ضلع BC در مثلث ABC باشد، داریم:




$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

نکتهٔ ۲ (ترکیب در مخرج):

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b+a} = \frac{c}{d+c}$$

در مثلث ABE با توجه به اینکه OC موازی AB است، داریم:

$$\overset{\triangle}{ABE}: \frac{OC}{AB} = \frac{OE}{BE} \Rightarrow \frac{OE}{BE} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{BE}{OE} = ۳ \Rightarrow \frac{BO + EO}{EO} = ۳ \Rightarrow \frac{BO}{EO} = \frac{۲}{۱} \xrightarrow{\text{نکتهٔ ۲}} \frac{BO}{EO + BO} = \frac{۲}{۱+۲} \Rightarrow \frac{BO}{BE} = \frac{۲}{۳}$$

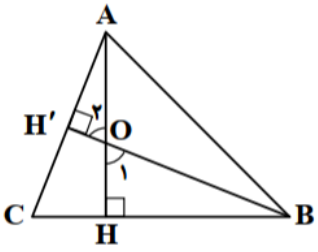
در مثلث BEF، با توجه به اینکه $OD \parallel EF$ و با استفاده از نکتهٔ ۱ داریم:

$$\frac{OD}{EF} = \frac{BO}{BE} \Rightarrow \frac{۴}{EF} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow EF = ۶$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۴۳** نکته: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشد، آن دو مثلث با هم متشابه‌اند.

دو مثلث $AOH'$ و $OBH$ متشابه‌اند، زیرا:




$$\begin{cases}\hat{O}_1=\hat{O}_2\\ \hat{H}=\hat{H}'=90^\circ\end{cases}\Rightarrow \overset{\triangle}{AOH'}\sim\overset{\triangle}{OBH}$$

نسبت تشابه را برای اضلاع متناظر می‌نویسیم:

$$\frac{HB}{AH'}=\frac{OB}{OA}=\frac{OH}{OH'}$$

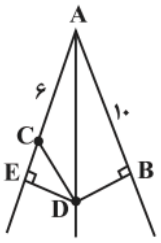
اگر دو تناسب آخر را در نظر بگیریم، داریم:

$$\frac{OB}{OA}=\frac{OH}{OH'}\Rightarrow OH'\times OB=OH\times OA$$

بنابراین گزینهٔ ۲ درست است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۴۴** در مثلث قائم‌الزاویه $ADB$ با رابطهٔ فیثاغورس اندازهٔ $BD$ را به‌دست می‌آوریم:




$$BD^2+10^2=12^2\to BD=\sqrt{44}$$

از طرف دیگر چون نقطهٔ $D$ روی نیمساز زاویهٔ $A$ قرار دارد، $ED=BD$ است هم‌چنین می‌دانیم دو مثلث $ABD$ و $AED$ هم‌نهشت‌اند، پس $AE=AB=10$ می‌باشد.

$$EC=10-6=4$$

در آخر با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث $ECD$، اندازهٔ $CD$ را می‌یابیم:

$$CD^2=4^2+\sqrt{44}^2=60\to CD=\sqrt{60}=2\sqrt{15}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۴۵** طبق قضیه تالس در ذوزنقه:

$$\frac{AS}{SD}=\frac{BT}{TC}\Rightarrow\frac{2}{x+2}=\frac{x-4}{3}\Rightarrow 6=(x+2)(x-4)$$

$$\Rightarrow 6=x^2-2x-8\Rightarrow x^2-2x-14=0$$

$$\Delta=4-4(-14)(1)=60$$

$$x_1,x_2=\frac{+2\pm\sqrt{60}}{2}=1\pm\sqrt{15}\xrightarrow{x>4}x=1+\sqrt{15}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

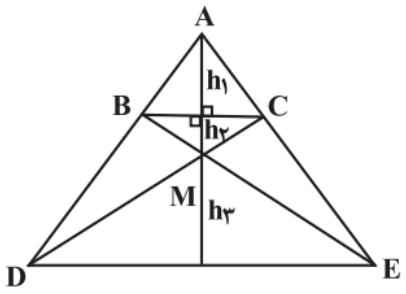
**۲۴۶** مثلث $ABC$ متساوی الاضلاع است پس:

$$\begin{cases}\hat{B}=60^\circ\\ \hat{C}=60^\circ\\ AB=BC=AC=12\end{cases}\Rightarrow \overset{12}{BC}=\overset{8}{BE}+EC\Rightarrow EC=4$$

$$\left.\begin{matrix}\hat{B}=\hat{C}=60^\circ\\ \hat{A}_1=\hat{E}_1\end{matrix}\right\}\overset{\triangle}{ABE}\overset{(zz)}{\sim}\overset{\triangle}{CEF}\Rightarrow\frac{\overbrace{CE}^{4}}{\underbrace{AB}_{12}}=\frac{EF}{AE}=\frac{CF}{\underbrace{BE}_{8}}\quad\frac{CE}{AB}=\frac{CF}{BE}\Rightarrow\frac{4}{12}=\frac{x}{8}\Rightarrow x=\frac{8}{3}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۴۷**




$$BC \parallel DE \Rightarrow \frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{h_1}{h_1+h_2+h_3}=\frac{1}{n}(1)$$

$$\overset{\Delta}{MBC} \sim \overset{\Delta}{MDE} \Rightarrow \frac{BC}{DE}=\frac{h_2}{h}=\frac{1}{n} \Rightarrow h_3=nh_2(2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{h_1}{h_1+h_2+nh_2}=\frac{1}{n} \Rightarrow nh_1=h_1+h_2+nh_2$$

$$\Rightarrow nh_1-h_1=nh_2+h_2 \Rightarrow h_1(n-1)=h_2(n+1) \Rightarrow \frac{h_1}{h_2}=\frac{n+1}{n-1}$$

$$\text{بنابراین}: \frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{MBC}}}=\frac{\frac{1}{2}BC.h_1}{\frac{1}{2}BC.h_2}=\frac{n+1}{n-1}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۴۸**

در مثلث $\overset{\Delta}{ACE}$ با توجه به قضیه تالس داریم:

$$BD \parallel EC \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CE} \Rightarrow \frac{5-x}{5}=\frac{BD}{3} \Rightarrow BD=\frac{3}{5}(5-x)(1)$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{ADC}$ داریم:

$$BD^2=BC\times AB \Rightarrow BD^2=x(5-x)(2)$$

با قراردادن رابطه (۱) در (۲) داریم:

$$(\frac{3}{5}(5-x))^2=x(5-x) \Rightarrow \frac{9}{25}(5-x)^2=x(5-x) \Rightarrow \frac{9}{25}(5-x)=x$$

$$\Rightarrow 45-9x=25x \Rightarrow 34x=45 \rightarrow x=\frac{45}{34}$$

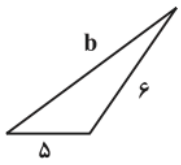
(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

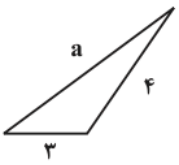
**۲۴۹**

شرط اول این است که $b$ ضلع بزرگتر مثلث دوم باشد و شرط بعد اینکه با بزرگترین ضلع ممکن از مثلث اول متناظر شود که یا $a$ و یا ۴ است.

پس یکی یکی دو حالت اخیر را بررسی می‌کنیم.

حالت اول: بزرگترین ضلع مثلث اولی $a$ باشد:

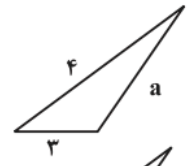


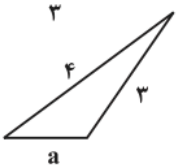




$$\Rightarrow \frac{6}{4} \neq \frac{5}{3}$$

نسبت اضلاع متناظر برابر نشد پس در این حالت دو مثلث متشابه نیستند.

حالت دوم: بزرگترین ضلع مثلث اولی ۴ باشد که خود شامل ۲ حالت مختلف دیگر است.




اگر $a>3$

$$\Rightarrow k=\frac{5}{3}=\frac{b}{4}=\frac{6}{a} \Rightarrow b=\frac{20}{3}$$

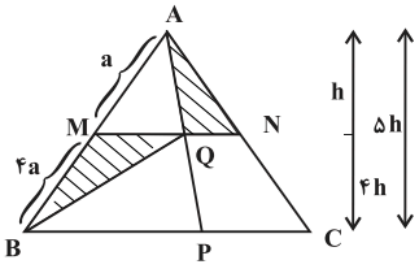
اگر $a<3$

$$\Rightarrow k=\frac{5}{a}=\frac{b}{4}=\frac{6}{3} \Rightarrow b=8$$

پس بیشترین مقدار $b$ برابر ۸ است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۵۰** در این نوع سؤالات معمولاً نسبت‌بندی در شکل، کار را سریعتر انجام می‌دهد به این صورت که با توجه به اینکه $\frac{AM}{MB}=\frac{۱}{۴}$ است، تمام عناصر مربوط به مثلث $AMN$ را با ضریب ۱ و عناصر مثلث $ABC$ را با ضریب ۵ نسبت‌بندی می‌کنیم. داریم:




$$۳PC=PB \xrightarrow{\text{بدلیل تشابه}} MQ=۳QN \qquad BC=۵b \text{ و } MN=b \begin{cases} QN=\frac{۱}{۴}b \\ MQ=\frac{۳}{۴}b \end{cases}$$

ارتفاع مثلث $ABC$ $۵h$

ارتفاع مثلث $AQN$ $h$

ارتفاع مثلث $MQB$ وارد بر $MQ$ ، پس: $۴h$

$$\frac{S_{BMQ}}{S_{AQN}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴}b\times ۴h}{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}b\times h}=۱۲$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۵۱** ابتدا مرکز دو دایره را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۲+y^۲-۲x-۳=۰\Rightarrow O=(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲})=(۱,۰) \qquad x^۲+y^۲-۲y=۰\Rightarrow O'=(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲})=(۰,۱)$$

لذا کانون‌های بیضی نقاط $F(۱,۰)$ و $F'(۰,۱)$ هستند. داریم:

$$FF'=۲c\Rightarrow\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}\Rightarrow ۲c=\sqrt{۲}\Rightarrow c=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

خروج از مرکز بیضی $e=\frac{\sqrt{۸}}{۸}$ یا $e=\frac{۲\sqrt{۲}}{۸}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ می‌باشد؛ داریم:

$$e=\frac{c}{a}\Rightarrow a=\frac{c}{e}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۴}}=۲\Rightarrow a=۲$$

از طرفی در بیضی: $a^۲=b^۲+c^۲$ می‌باشد؛ لذا داریم:

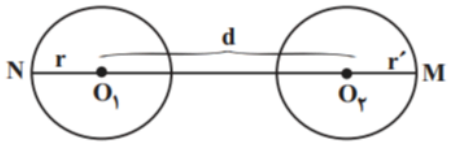
$$b^۲=a^۲-c^۲=۲^۲-(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲=۴-\frac{۲}{۴}=\frac{۷}{۲}\Rightarrow b=\frac{\sqrt{۷}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۱۴}}{۲}$$

لذا طول قطر بزرگ $۲a$ یعنی ۴ و طول قطر کوچک $۲b$ یعنی $\sqrt{۱۴}$ خواهد بود.

عبارت موردنظر $=|(\sqrt{۱۴})^۲-۴^۲|=۲$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۵۲** دو دایره نسبت به‌هم متخارج‌اند و با توجه به شکل زیر، بیشترین فاصله $(MN)$ برابر $d+r+r'$ است.




$$(x+۴)^۲+(y-۹)^۲=۱\rightarrow O_۱(-۴,۹),r=۱$$

$$(x-۱)^۲+(y+۳)^۲=۴\rightarrow O_۲(۱,-۳),r'=۲$$

$$\rightarrow d=O_۱O_۲=\sqrt{(۱+۴)^۲+(-۳-۹)^۲}=\sqrt{۲۵+۱۴۴}=\sqrt{۱۶۹}=۱۳$$

$$\rightarrow \max(MN)=d+r+r'=۱۶$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۵۳**

$$(x-۱)^۲+(y+a)^۲=۱۶\Rightarrow \begin{cases} O(۱,-a) \\ r=۴ \end{cases} (I)$$

$$x^۲+y^۲+۶x-۸y=a^۲-۲۵\rightarrow x^۲+۶x+۹+y^۲-۸y+۱۶=a^۲-۲۵+۱۶+۹\rightarrow (x+۳)^۲+(y-۴)^۲=a^۲\Rightarrow \begin{cases} O'(-۳,۴) \\ r'=a \end{cases} (II)$$

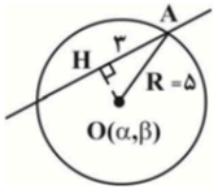
دو دایره مماس درون هستند:

$$OO'=|r-r'|\xrightarrow{(I),(II)}\sqrt{(۱+۳)^۲+(۴+a)^۲}=|۴-a| \qquad ۱۶+a^۲+۸a+۱۶=۱۶-۸a+a^۲\rightarrow ۱۶a=-۱۶\rightarrow a=-۱$$

$$OO'=\sqrt{۴^۲+(۴+a)^۲}\overset{(a=-۱)}{=\!=}\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۵۴** در مثلث **AOH** طول **OH** برابر ۴ است.




بنابراین مرکزهای دایره‌ها روی خط‌هایی موازی خط $۳x+۴y=۱$ به فاصلهٔ ۴ واحد هستند. این خط‌ها را $۳x+۴y+c=۰$ فرض می‌کنیم.

$$۴=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\rightarrow ۴=\frac{|c-(-۱)|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}\rightarrow ۲۰=|c+۱|\rightarrow \begin{cases} c=۱۹ \\ c=-۲۱ \end{cases}$$

معادلهٔ خط‌ها $۳x+۴y+۱۹=۰$ و $۳x+۴y-۲۱=۰$ هستند.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۵۵** **گام اول:** فرض می‌کنیم $AB=۳x$ و $AC=۴x$. در نتیجه در مثلث $ABC$ طبق قضیهٔ فیثاغورس:

$$BC^۲=AC^۲+AB^۲\Rightarrow BC=۵x$$

**گام دوم:** طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$BH\times BC=AB^۲\Rightarrow BH\times ۵x=۹x^۲\Rightarrow BH=۱/۸x$$

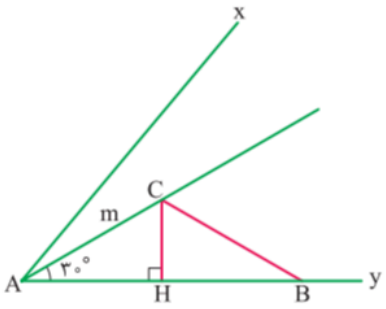
**گام سوم:** حال در مثلث‌های $ABD$ و $BDE$، چون $BD$ نیمساز زاویهٔ $B$ است و وتر $BD$ مشترک این دو مثلث همنهشت‌اند، در نتیجه: $BE=AB=۳x$.

**گام چهارم:** حال نسبت خواسته‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{HE}{BH}=\frac{BE-BH}{BH}=\frac{AB-BH}{BH}=\frac{۳x-۱/۸x}{۱/۸x}=\frac{۱/۲}{۱/۸}=\frac{۲}{۳}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۵۶** **پاسخ تشریحی** **گام اول:** نقطهٔ C از دو ضلع زاویهٔ xAy به یک فاصله است، پس روی نیمساز این زاویه قرار دارد و از دو سر پاره‌خط AB، به فاصلهٔ یکسان است، پس روی عمودمنصف این پاره‌خط واقع است؛ بنابراین نیمساز زاویهٔ xAy و عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ C قطع کنند.




**گام دوم:** در مثلث ACH، $AC = m$ و $C\hat{A}H = ۳۰^\circ$ است؛ بنابراین به کمک سینوس و کسینوس زاویهٔ CAH، مقادیر CH و AH را برحسب m به دست می‌آوریم.

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{CH}{m} \Rightarrow CH = \frac{m}{۲}$$

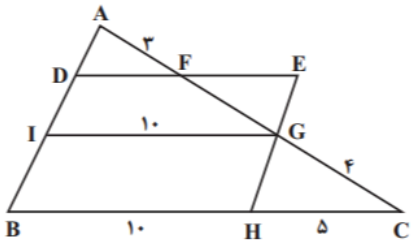
$$\cos ۳۰^\circ = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{AH}{m} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}m$$

**گام سوم:** عمودمنصف یک پاره‌خط، آن پاره‌خط را نصف می‌کند؛ پس $AB = ۲AH = \sqrt{۳}m$ است و در نتیجه داریم:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}CH \times AB = \frac{۱}{۲} \times \frac{m}{۲} \times \sqrt{۳}m = \frac{\sqrt{۳}}{۴}m^۲$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۵۷** از G موازی BC رسم می‌کنیم تا AB را در I قطع می‌کند:




$$GI = BH = ۱۰$$

$$GI \parallel BC \Rightarrow \frac{AG}{AG+۴} = \frac{۱۰}{۱۰+۵} = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳AG = ۲AG + ۸ \Rightarrow AG = ۸ \Rightarrow FG = ۸ - ۳ = ۵$$

$$DF \parallel IG \Rightarrow \frac{DF}{۱۰} = \frac{۳}{۸} \Rightarrow DF = \frac{۱۵}{۴} \Rightarrow FE = ۱۰ - \frac{۱۵}{۴} = \frac{۲۵}{۴} \Rightarrow FG + ۴FE = ۵ + ۴ \times \frac{۲۵}{۴} = ۳۰$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۵۸** در مرحلهٔ اول معادلهٔ وتر مشترک دو دایره را به دست می‌آوریم:

$$\text{تفاضل معادلات دو دایره}: \begin{cases} x^۲ + y^۲ - x - \frac{۳}{۴} = ۰ \\ x^۲ + y^۲ + x - \frac{۳}{۴} = ۰ \end{cases} \Rightarrow -۲x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow \text{معادلهٔ وتر مشترک}$$

در مرحله دوم نقاط تقاطع دو دایره را به دست می‌آوریم:

$$\sqrt{۳} = \text{طول وتر مشترک} \Rightarrow (۰, \frac{\sqrt{۳}}{۲}) , (۰, -\frac{\sqrt{۳}}{۲}) : \text{نقاط تقاطع}$$

$$x = ۰ \xrightarrow[\text{در دایره اول}]{\text{جایگذاری}} y^۲ = \frac{۳}{۴} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۵۹**

$$m_{AB}=\frac{۳/۵-۲}{۰/۵-۲}=-۱\Rightarrow m_{CD}=-۱ \quad (\text{زیرا ضلع } CD \text{ با } AB \text{ موازی است}) \qquad AB: y-۲=-۱\times(x-۲)\Rightarrow AB: x+y-۴=۰$$

$$\text{طول ضلع } AB=\sqrt{(۲-۰/۵)^۲+(۲-۳/۵)^۲}=\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$$

چون ضلع CD موازی ضلع AB است پس شیب برابر با AB داشته و داریم:

$$CD: y=-x+a$$

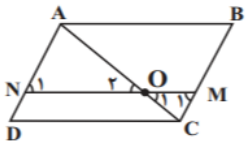
از سمتی فاصله خط AB از خط CD، همان طول ضلع AB است، پس:

$$\left.\begin{matrix}AB: x+y-۴=۰\\ CD: x+y-a=۰\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{|a-۴|}{\sqrt{۲}}=\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}\quad\Rightarrow|a-۴|=۳\quad\Rightarrow a=۱ \text{ یا } ۷$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۶۰**

$$\left.\begin{matrix}MN \text{ مورب}\\ \hat{O}_۱=\hat{O}_۲=\text{متقابل به رأس}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\hat{N}_۱=\hat{M}_۱$$




$$\left.\begin{matrix}\hat{M}_۱=N_۱\\ \hat{O}_۱=\hat{O}_۲\end{matrix}\right\}\to\overset{\Delta}{OAN}\sim\overset{\Delta}{OMC}\Rightarrow\frac{MC}{AN}=\sqrt{\frac{۲۵}{۱۰۰}}$$

$$\to\frac{MC}{AN}=\frac{۱}{۲},MC=ND\to\frac{ND}{AN}=\frac{۱}{۲}\to\frac{ND+AN}{AN}=\frac{۱+۲}{۲}\to\frac{AD}{AN}=\frac{۳}{۲}$$

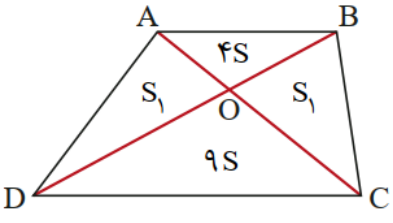
(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۶۱**

می‌دانیم اوّلاً: $S_{OAD}=S_{OBC}$

ثانیاً مثلث‌های OAB و ODC متشابهند.

پس نسبت تشابه آن‌ها $\frac{۲}{۳}$ است.




$$OD=\frac{۳}{۲}OB\ ,\ OC=\frac{۳}{۲}OA$$

$$\frac{S_{DOC}}{S_{DAO}}=\frac{OC}{OA}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{۹S}{S_۱}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow S_۱=۶S$$

$$\frac{S_۱}{S_{ABCD}}=\frac{S_۱}{۴S+۹S+۶S+۶S}=\frac{S_۱}{۲۵S}=\frac{۶S}{۲۵S}=\frac{۲۴}{۱۰۰}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۶۲**

به کمک قضیه فیثاغورس داریم: $BC^۲=AB^۲+AC^۲\Rightarrow BC=۵$

از طرفی

$$AH\cdot BC=AB\cdot AC\Rightarrow AH=۲/۴$$

چون میانه وتر را نصف می‌کند پس

$$CM=MB=\frac{۵}{۲}$$

در مثلث قائم‌الزاویه $AB^۲=BH\cdot BC$ پس:

$$AB^۲=BH\cdot BC\Rightarrow ۹=BH\times۵\Rightarrow BH=۱/۸$$

$$\Rightarrow HM=BM-BH=۲/۵-۱/۸=۰/۷\Rightarrow S_{AMH}=\frac{۱}{۲}AH\cdot MH=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲۴}{۱۰}\times\frac{۷}{۱۰}$$

$$S=\frac{۸۴}{۱۰۰}=۰/۸۴$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۶۳** ابتدا دو دایره را استاندارد می‌کنیم.

$$x^۲+(y-۳)^۲=۱۸ \qquad O_۱\begin{vmatrix}۰\\۳\end{vmatrix}\ ,\ R_۱=۳\sqrt{۲}$$

$$x^۲+۴x+y^۲-۱۰y=-k\Rightarrow(x+۲)^۲+(y-۵)^۲=۲۹-k$$

$$O_۲\begin{vmatrix}-۲\\۵\end{vmatrix}\ ,\qquad R_۲=\sqrt{۲۹-k}$$

چون مماس داخلی هستند پس اگر d فاصله ۲ مرکز باشند آنگاه $d=|R_۱-R_۲|$

$$d=O_۱O_۲=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{۲}=|R_۱-R_۲|\Rightarrow ۲\sqrt{۲}=|۳\sqrt{۲}-\sqrt{۲۹-k}|$$

$$۲\sqrt{۲}=۳\sqrt{۲}-\sqrt{۲۹-k}\Rightarrow\sqrt{۲۹-k}=\sqrt{۲}\Rightarrow k=۲۷\ \checkmark$$

$$۲\sqrt{۲}=\sqrt{۲۹-k}-۳\sqrt{۲}\Rightarrow ۵\sqrt{۲}=\sqrt{۲۹-k}\Rightarrow ۵۰=۲۹-k$$

$$k=-۲۱\ \times$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۶۴** چون دو خط داده شده ۲ ضلع مقابل مربع هستند با هم موازی‌اند پس:

$$(a+۱)x+۴y+b=۰$$

$$۳x+ay+۵=۰$$

$$\frac{a+۱}{۳}=\frac{۴}{a}\Rightarrow a(a+۱)=۱۲\xrightarrow{a<۰}\begin{cases}a=۳\ \text{غ ق ق}\\ a=-۴\ \text{ق ق}\end{cases}$$

فاصله ۲ خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ از رابطهٔ $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ به‌دست می‌آید.

$$a=-۴\ \begin{cases}-۳x+۴y+b=۰\\ -۳x+۴y-۵=۰\end{cases}\qquad d=\frac{|b+۵|}{۵}\Rightarrow S=\frac{(b+۵)^۲}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵}$$

$$\begin{cases}b+۵=۴\ \Rightarrow\ b=-۱\\ b+۵=-۴\ \Rightarrow\ b=-۹\end{cases}\Rightarrow a-b\Rightarrow\begin{cases}-۳\\ ۵\end{cases}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۶۵**

$$OCD\sim OEF\Rightarrow\frac{CD}{EF}=\frac{OD}{OE}=\frac{OC}{OF}\Rightarrow\frac{y}{۲}=\frac{۶}{۳}\Rightarrow y=۴\Rightarrow\frac{OD}{OE}=۲\Rightarrow\frac{OD}{y}=۲\Rightarrow OD=۸$$

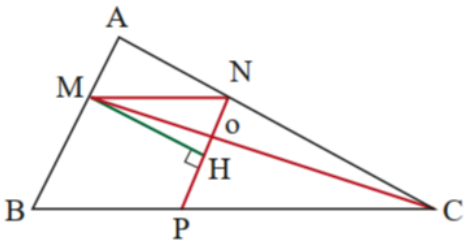
$$OCD\sim OAB\Rightarrow\frac{OD}{OB}=\frac{OC}{OA}=\frac{CD}{AB}\Rightarrow\frac{۸}{۸+x}=\frac{۶}{OA}=\frac{y}{۳x}\Rightarrow\frac{۸}{۸+x}=\frac{۴}{۳x}\Rightarrow$$

$$۲۴x=۴x+۳۲\Rightarrow x=\frac{۳۲}{۲۰}=\frac{۸}{۵}\Rightarrow\frac{۶}{OA}=\frac{۴}{\frac{۲۴}{۵}}\Rightarrow OA=\frac{۲۴}{۵}\times\frac{۶}{۴}=۷/۲$$

$$\Rightarrow\frac{AF}{BE}=\frac{OA+۳}{x+y+OD}=\frac{۷/۲+۳}{\frac{۸}{۵}+۴+۸}=\frac{۷/۲+۳}{۱۳/۶}=\frac{۱۰/۲}{۱۳/۶}=\frac{۱۰۲}{۱۳۶}=\frac{۵۱}{۶۸}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۶۶** طبق تالس نتیجه‌گیری زیر صحیح است.




$$AM = x \Rightarrow MB = ۳x \Rightarrow AN = y \Rightarrow NC = ۳y$$

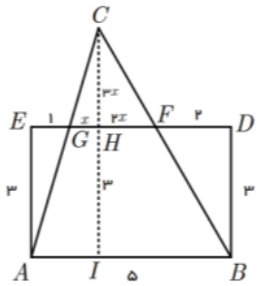
$$\frac{S_{OMN}}{S_{MNPB}} = \frac{\frac{۱}{۲}MH \cdot ON}{MH \cdot \underbrace{NP}_{MB}} = \frac{ON}{۶x}$$

حال سعی می‌کنیم $ON$ را برحسب $x$ پیدا کنیم. در مثلث $AMC$ داریم:

$$\frac{ON}{AM} = \frac{NC}{AC} \Rightarrow \frac{ON}{x} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow ON = \frac{۳}{۴}x \Rightarrow \frac{S_{OMN}}{S_{MNPB}} = \frac{\frac{۳}{۴}x}{۶x} = \frac{۳}{۲۴} = \frac{۱}{۸}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۶۷** ارتفاع $CI$ از مثلث $ABC$ را رسم می‌کنیم و محل برخورد آن با پاره‌خط $ED$ را $H$ می‌نامیم. باتوجه به تشابه دو مثلث $FDB$ و $FHC$ و همچنین تشابه دو مثلث $HGC$ و $GEA$، اگر نسبت تشابه دو مثلث $FDB$ و $FHC$ را $x$ بگیریم، خواهیم داشت:




$$\frac{FH}{FD} = \frac{CH}{DB} = x \Rightarrow FH = ۲x, CH = ۳x$$

$$\frac{GH}{CH} = \frac{EG}{EA} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow GH = x$$

دو مثلث $GCF$ و $ABC$ نیز متشابه‌اند و چون $GF = CH = ۳x$ پس در مثلث $ABC$ نیز ارتفاع و قاعدهٔ وارد بر آن برابرند. پس مساحت مثلث $ABC$ برابر $\frac{۱}{۲} \times CI \times AB = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۵ = ۱۲٫۵$ است.

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۶۸** معادلهٔ وتر مشترک دو دایره از برابر قراردادن معادلهٔ این دو دایره به دست می‌آید:

$$(x-۲)^۲ + y^۲ = ۴ \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۴ + y^۲ - ۴ = ۰$$

$$x^۲ + (y-۱)^۲ = ۴ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲y + ۱ - ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۴x + ۴ + y^۲ - ۴ = x^۲ + y^۲ - ۲y + ۱ - ۴ \Rightarrow ۲y = ۴x - ۳$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۶۹**

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{OPR} \sim \overset{\Delta}{OQP'} \sim \overset{\Delta}{OQ'R'}$$

طبق روابط مساحت شکل‌های متشابه ثابت می‌شود که:

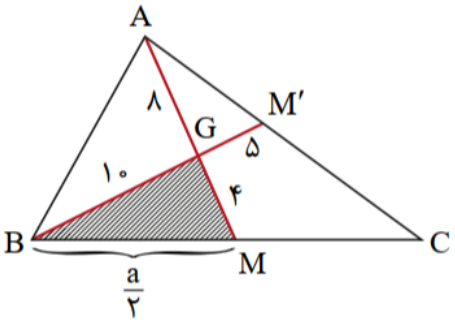
$$\sqrt{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \sqrt{S_{\overset{\Delta}{OPR}}} + \sqrt{S_{\overset{\Delta}{OP'Q}}} + \sqrt{S_{\overset{\Delta}{OQ'R'}}}$$

$$\rightarrow \sqrt{۶۴} = \sqrt{S_{\overset{\Delta}{OPR}}} + \sqrt{۱۶} + \sqrt{۹}$$

$$\rightarrow S_{\overset{\Delta}{OPR}} = ۱$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۷۰**



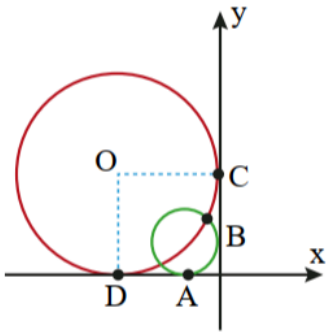

$$\overset{\Delta}{BGM} = |۱۰-۴| < \frac{a}{۲} < ۱۰+۴$$

$$۶ < \frac{a}{۲} < ۱۴$$

$$۱۲ < a < ۲۸$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۷۱**



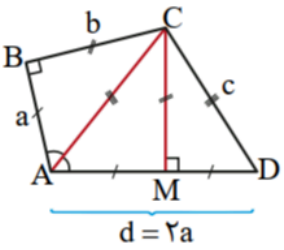

$$O(-r,r) \Rightarrow (x+r)^۲ + (y-r)^۲ = r^۲$$

$$\xrightarrow{(-۱,۳)} (-۱+r)^۲ + (۳-r)^۲ = r^۲$$

$$\rightarrow r^۲ - ۸r + ۱۰ = ۰ \Rightarrow r = ۴ \pm \sqrt{۶} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{(۴+\sqrt{۶})^۲}{۲} - \frac{(۴-\sqrt{۶})^۲}{۲} = \frac{۸+۲\sqrt{۶}}{۲} = ۸\sqrt{۶}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۷۲** با توجه به توضیحات سؤال، عمود منصف AD و نیمساز A همدیگر را در رأس C قطع می‌کنند. با توجه به شکل واضح است که a، b و c اعداد متوالی هستند که تشکیل مثلث قائم‌الزاویه می‌دهند. بنابراین:

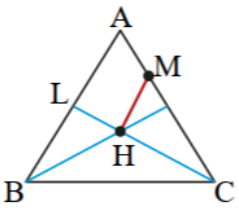



$$a = ۳ / b = ۴ / c = ۵ \rightarrow d = ۲a = ۶$$

$$\rightarrow S_{ABCD} = ۳S_{ABC} = ۳ \times \frac{۳ \times ۴}{۲} = ۱۸$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۷۳** در مثلث متساوی‌الاضلاع محل هم‌راس ارتفاع‌ها. همان محل همرس میانه‌ها هم هست و می‌دانیم میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند.




$$\rightarrow HC = \frac{۲}{۳}LC$$

CL میانه است

$$\Delta ACL, MH \parallel AL \text{ تالس} \rightarrow \frac{HM}{\cancel{AL}^{۴}} = \frac{\cancel{HC}^{\frac{۲}{۳}LC}}{LC}$$

$$\rightarrow HM = \frac{۸}{۳}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

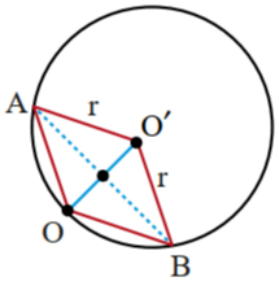
**۲۷۴**

$AB=\sqrt{۸^۲+۶^۲}=۱۰$ $\sqrt{۳}r=۱۰\to r=\frac{۱۰}{\sqrt{۳}}$ $m_{AB}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$

$m_{oo'}=\frac{-۴}{۳}$

$a=\frac{-۴}{۳}$

و فاصله دو خط $\frac{۲۰}{\sqrt{۳}}$ خواهد بود پس:




$|^{۷}_{۱}$

$y+\frac{۴}{۳}x-b=۰$

$y+\frac{۴}{۳}x-b'=۰$

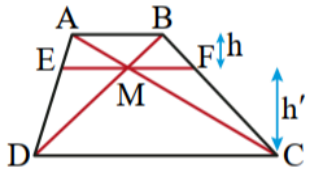
$\frac{|b-b'|}{\frac{۵}{۳}}=\frac{۲۰}{\sqrt{۳}}\to|b-b'|=\frac{۱۰۰}{۳\sqrt{۳}}$

$a|b-b'|=?$

$\frac{-۴}{۳}\times\frac{۱۰۰}{۳\sqrt{۳}}=\frac{-۴۰۰}{۲۷}$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۷۵**




$\frac{۲}{EF}=\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{CD}=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۲}\to EF=۴$

$\to ME=MF=۲$

تالسی: $\frac{h}{h+h'}=\frac{MF}{CD}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\to h'=۲h$

$\frac{S_{CDEF}}{S_{ABFE}}=\frac{\frac{h'}{۲}\times(EF+CD)}{\frac{h}{۲}(EF+AB)}=\frac{h'}{h}\times\frac{۴+۶}{۴+۳}=۲\times\frac{۱۰}{۷}=\frac{۲۰}{۷}\simeq۳$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۷۶**

مرکز دایره داده شده $(-۲,۰)$ و شعاع آن ۴ است. پس داریم:

$\frac{O'(-۲,۰)}{O(۲,۳)}\to OO'\sqrt{(\Delta x)^۲+(\Delta y)^۲}=\sqrt{۴^۲+۳^۲}=۵$

شرط مماس بودن دایره‌ها این است که $OO'=r+r'$ یا $OO'=|r-r'|$

پس داریم:

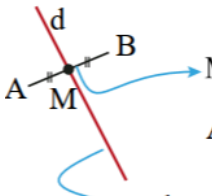
بنابراین جمع شعاع‌ها می‌شود «۱»

الف) $d=۴+r'\to r'=۱$

ب) $d=|۴-r'|\to r'=۹$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۷۷** در ابتدا مختصات نقطه M وسط A و B را به‌دست می‌آوریم و شیب خط AB را قرینه و معکوس می‌کنیم تا شیب خط عمود منصف بدست آید:




$$M=\frac{A+B}{۲}=(-۱,۱)$$

$$\text{شیب AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۶+۴}{-۳-۱}=\frac{۱۰}{-۴}=-\frac{۵}{۲}$$

$$\text{شیب d}=+\frac{۲}{۵}$$

$$y=\frac{۲}{۵}x+\frac{۷}{۵}$$

$$\text{مساحت محصور}=|\text{طول از مبدأ}\times\text{عرض از مبدأ}|\times\frac{۱}{۲}=|\frac{۷}{۵}\times-\frac{۷}{۲}|\times\frac{۱}{۲}=\frac{۴۹}{۲۰}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۷۸** اگر محل برخورد عمودمنصف‌های AB، CD و AD یک نقطه مانند O باشد، آنگاه دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA از چهار نقطهٔ A، B، C و D می‌گذرد.

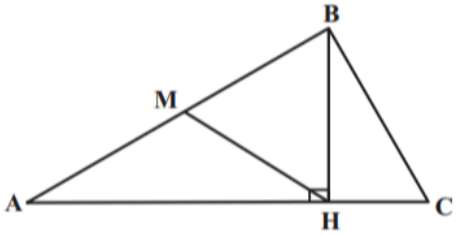
(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۷۹** طبق تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{m}{z}=\frac{x}{۴},\frac{n}{z}=\frac{x}{۹}\Rightarrow\frac{m}{z}+\frac{n}{z}=\frac{x}{۴}+\frac{x}{۹}\xrightarrow{m+n=z}۱=\frac{۱۳x}{۳۶}\Rightarrow x=\frac{۳۶}{۱۳}\Rightarrow ۱۳x-۱=۳۵$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۸۰** مثلث $\overset{\triangle}{ABH}$ قائم‌الزاویه است. نقطهٔ وسط ضلع AB را M می‌نامیم. در نتیجه MH نصف وتر است، یعنی $MH=AM$. بنابراین نقطهٔ M که از دو سر پاره‌خط AH به یک فاصله است، همواره بر روی عمودمنصف AH قرار دارد.



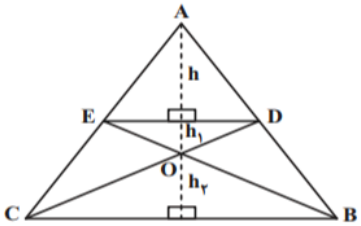

توجه: از آنجا که نقطهٔ B متغیر است، لذا عمود منصف BH نیز خطی متغیر بوده و به‌عنوان جواب، قابل قبول نیست.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۸۱** طبق تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{ED}{BC}=\frac{AE}{AC}=\frac{۲}{۵}$$

با توجه به شکل داریم:

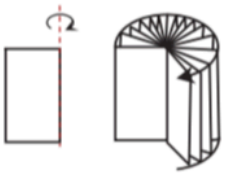



$$\frac{h}{h_۱+h_۲}=\frac{۲}{۳}\ ,\ \frac{h_۱}{h_۲}=\frac{ED}{BC}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow h_۱=\frac{۲}{۵}h_۲\Rightarrow\frac{h}{\frac{۷}{۵}h_۲}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{h}{h_۲}=\frac{۱۴}{۱۵}$$

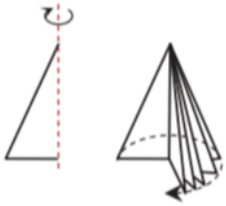
$$\frac{S_{AED}}{S_{OBC}}=\frac{\frac{ED\times h}{۲}}{\frac{BC\times h_۲}{۲}}=\frac{ED}{BC}\times\frac{h}{h_۲}=\frac{۲}{۵}\times\frac{۱۴}{۱۵}=\frac{۲۸}{۷۵}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۲۸۲**

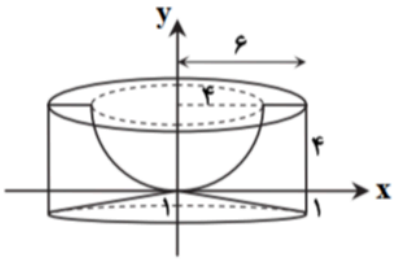


نکته: شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول یا عرض آن، یک استوانه است.



نکته: شکل، حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه، حول یکی از اضلاع قائمهٔ آن، یک مخروط است.

مطابق شکل برای محاسبهٔ حجم قسمت رنگ‌شده، باید از حجم استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۶ و ارتفاع ۵ واحد، حجم یک نیم‌کره به شعاع ۴ و حجم یک مخروط به شعاع قاعدهٔ ۶ و ارتفاع ۱ واحد را کم کنیم:




$$V_{۱}=V_{\text{استوانه}}=\pi r^{۲}h=\pi(۶)^{۲}(۵)=۱۸۰\pi$$

$$V_{۲}=V_{\text{نیمکره}}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}=\frac{۲}{۳}\pi(۴)^{۳}=\frac{۱۲۸\pi}{۳}$$

$$V_{۳}=V_{\text{مخروط}}=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h=\frac{۱}{۳}\pi(۶)^{۲}(۱)=۱۲\pi$$

$$V_{\text{قسمت رنگی}}=V_{۱}-(V_{۲}+V_{۳})=۱۸۰\pi-(\frac{۱۲۸\pi}{۳}+۱۲\pi)=\frac{۳۷۶\pi}{۳}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

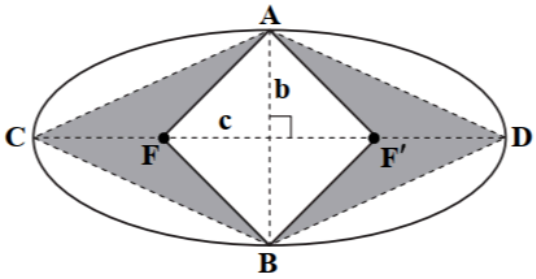
**۲۸۳**

نکته: مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامند و معمولاً آن را با حرف e نمایش می‌دهند.

با توجه به شکل: $CD=۲a\ ,\ AB=۲b\ ,\ FF'=۲c$

چهارضلعی‌های ACBD و AFBF′ لوزی هستند. (زیرا قطرها عمودمنصف هم هستند.)

می‌دانیم مساحت لوزی برابر با نصف حاصل‌ضرب دو قطر است. بنابراین:




$$S_{ACBD}=\frac{۱}{۲}\times CD\times AB=\frac{۱}{۲}\times ۲a\times ۲b=۲ab$$

$$S_{AFBF'}=\frac{۱}{۲}FF'\times AB=\frac{۱}{۲}\times ۲c\times ۲b=۲bc\quad(۱)$$

$$S_{\text{هاشورخورده}}=S_{ACBD}-S_{AFBF'}\Rightarrow ۶\sqrt{۳}=۲ab-۲bc$$

$$\Rightarrow ۶\sqrt{۳}=۲b(a-c)\quad(*)$$

از طرفی خروج از مرکز بیضی $\frac{۱}{۲}$ است، پس:

$$e=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{c}{a}\Rightarrow a=۲c\xrightarrow{(*)}۶\sqrt{۳}=۲b(۲c-c)\Rightarrow ۶\sqrt{۳}=۲bc\overset{(۱)}{=}S_{AFBF'}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

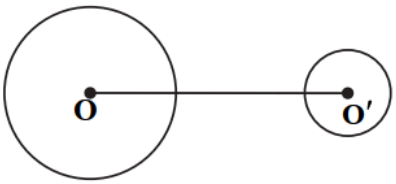
۲۸۴ نکته: رابطهٔ $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲$ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع $r$ در صفحهٔ مختصات است که به آن «معادلهٔ استاندارد دایره» می‌گوییم.

نکته: اگر $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ معادلهٔ گستردهٔ یک دایره باشد، مختصات مرکز این دایره $O(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲})$ است. شعاع این دایره برابر است با:

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}.$$

نکته: پاره‌خطی که مرکزهای دو دایره را به‌هم وصل می‌کند، «خط‌المرکزین» نامیده می‌شود.

اگر $OO'>r+r'$، دو دایره متخارج هستند.




ابتدا مرکز و شعاع دایره‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$C: x^۲+y^۲+۴x-۲y+۱=۰ \Rightarrow O(-۲,۱)\ ,\ r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۴-۴}=۲$$

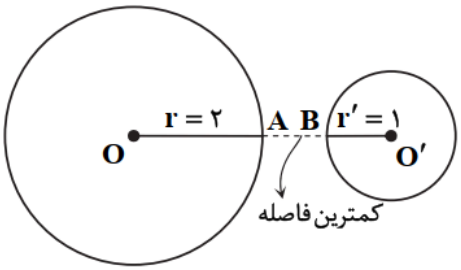
$$C': (x-۳)^۲+(y-۶)^۲=۱ \Rightarrow O'(۳,۶)\ ,\ r'=۱$$

اکنون وضعیت دو دایره را نسبت به‌هم مشخص می‌کنیم:

$$OO'=\sqrt{(-۲-۳)^۲+(۱-۶)^۲}=\sqrt{۲۵+۲۵}=۵\sqrt{۲}$$

$$r+r'=۳ \Rightarrow OO'>r+r' \Rightarrow$$ دو دایره متخارج (بیرون هم) هستند.

حال با توجه به شکل، کمترین فاصلهٔ دو دایره را محاسبه می‌کنیم:




$$\text{کمترین فاصلهٔ دو دایره} = AB = OO'-(r+r')=۵\sqrt{۲}-۳$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۸۵** نکته: اگر $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ معادلهٔ گستردهٔ یک دایره باشد، مختصات مرکز این دایره $O(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲})$ است. شعاع این دایره برابر است با: $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$

نکته: مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامند و معمولاً آن را با حرف $e$ نمایش می‌دهند.

مختصات مرکز و طول شعاع دایرهٔ $C$ را به‌دست می‌آوریم:

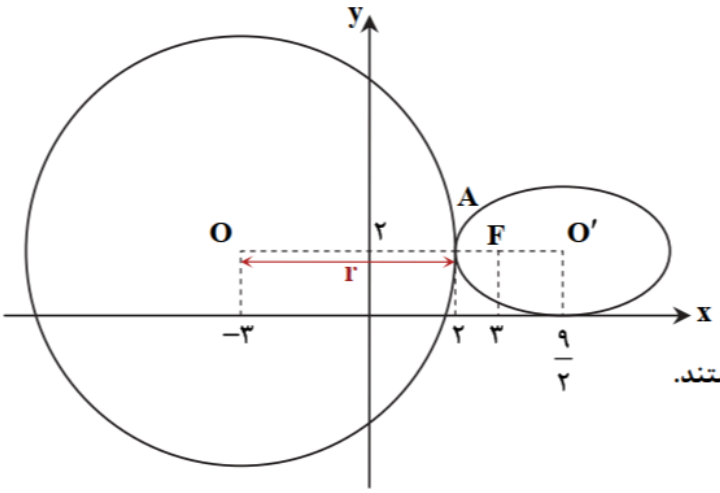
$$C: x^۲+y^۲+۶x-۴y-۱۲=۰ \Rightarrow O(-۳,۲)\ ,\ r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶+۱۶-۴(-۱۲)}=۵$$

با توجه به مختصات کانون‌های بیضی، یک بیضی افقی داریم. بنابراین:

$$F(۳,۲)\ ,\ F'(۶,۲) \Rightarrow ۲c=۶-۳=۳ \Rightarrow c=\frac{۳}{۲}\ ,\ \text{مرکز بیضی}: O'(\frac{۹}{۲},۲)$$

$$e=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{۳}{۵}=\frac{\frac{۳}{۲}}{a} \Rightarrow a=\frac{۵}{۲}\ ,\ a-c=۱$$

حال اگر دایره و بیضی را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم:

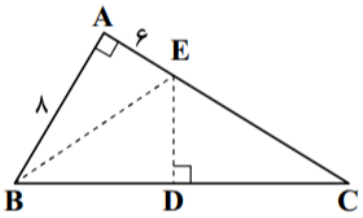



مشاهده می‌شود که دایره و بیضی در نقطهٔ $A(۲,۲)$ برهم مماس هستند.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۸۶** از نقطهٔ $E$ به رأس $B$ وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABE$، طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$EB^۲=AB^۲+AE^۲ \Rightarrow EB^۲=۸^۲+۶^۲ \Rightarrow EB^۲=۱۰۰ \Rightarrow EB=۱۰$$




نقطهٔ $E$ روی عمودمنصف پاره‌خط $BC$ قرار دارد، بنابراین فاصلهٔ آن از نقاط $B$ و $C$ یکسان است؛ بنابراین طول $EC$ نیز برابر ۱۰ است. اکنون با توجه به قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $ABC$، طول $BC$ را به‌دست می‌آوریم:

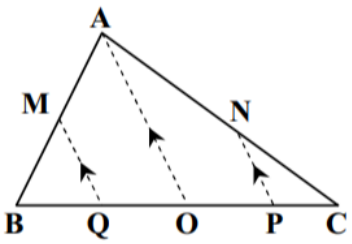
$$BC^۲=AB^۲+AC^۲ \Rightarrow BC^۲=۸^۲+(۱۰+۶)^۲ \Rightarrow BC^۲=۶۴+۲۵۶ \Rightarrow BC^۲=۳۲۰ \Rightarrow BC=۸\sqrt{۵}$$

نقطهٔ $D$ نیز روی عمودمنصف $BC$ قرار دارد، پس $BD=DC$، بنابراین $CD=\frac{BC}{۲}$؛ یعنی $CD=۴\sqrt{۵}$. بار دیگر با توجه به قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $EDC$ داریم:

$$EC^۲=DE^۲+DC^۲ \Rightarrow ۱۰^۲=DE^۲+(۴\sqrt{۵})^۲ \Rightarrow ۱۰۰-۸۰=DE^۲ \Rightarrow DE=\sqrt{۲۰} \Rightarrow DE=۲\sqrt{۵}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۸۷** از نقطهٔ A خطی موازی دو پاره‌خط MQ و NP رسم می‌کنیم تا BC را در O قطع کند. به کمک تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABO داریم:



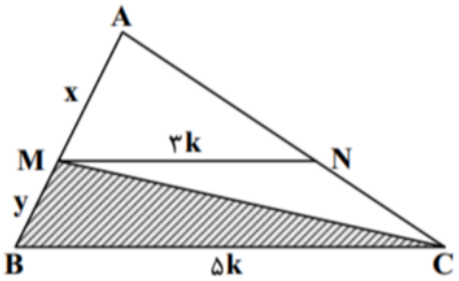

$$MQ \parallel AO \Rightarrow \frac{BM}{BA}=\frac{MQ}{AO} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{۱۲}{AO} \Rightarrow AO=۲۴$$

همچنین با توجه به تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث AOC داریم:

$$\frac{CN}{CA}=\frac{NP}{AO} \Rightarrow \frac{۱}{۱+۲}=\frac{NP}{۲۴} \Rightarrow NP=\frac{۲۴}{۳} \Rightarrow NP=۸$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

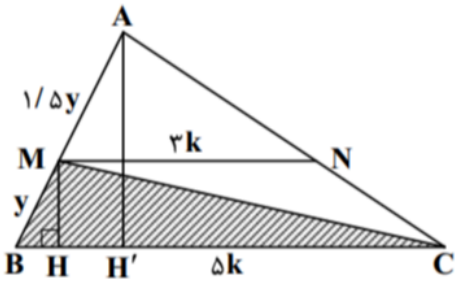
**۲۸۸** چون MNCB ذوزنقه است، پس $MN \parallel BC$. حال داریم:




$$\overset{\triangle}{ABC}: MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+y}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow ۲x=۳y \Rightarrow x=۱/۵y$$

اگر از نقاط M و A بر BC عمود کنیم، داریم:




$$\overset{\triangle}{BAH'}: MH \parallel AH' \Rightarrow \frac{BM}{BA}=\frac{MH}{AH'}$$

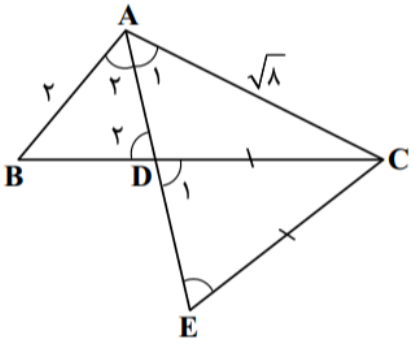
$$\Rightarrow \frac{y}{۲/۵y}=\frac{MH}{AH'} \Rightarrow \frac{MH}{AH'}=\frac{۱}{۲/۵} \quad (*)$$

اکنون داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{MBC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times MH\times BC}{\frac{۱}{۲}\times AH'\times BC}=\frac{MH}{AH'} \overset{(*)}{=} \frac{۱}{۲/۵}=۰/۴$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۸۹** با توجه به شکل مقابل داریم:




$$\begin{cases} CD = CE \Rightarrow \hat{D}_۱ = \hat{E} \\ \hat{D}_۱ = \hat{D}_۲ \quad (\text{متقابل‌به‌رأس}) \end{cases} \Rightarrow \hat{E} = \hat{D}_۲$$

از طرفی AD نیمساز زاویهٔ A است. پس $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ ؛ بنابراین:

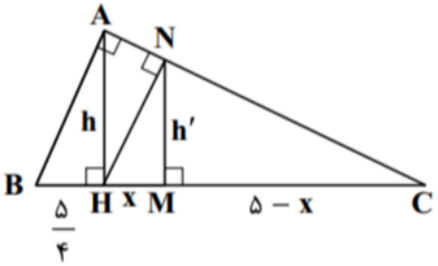
$$\begin{cases} \hat{E} = \hat{D}_۲ \\ \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \end{cases} \xrightarrow{(zz)} \overset{\triangle}{AEC} \sim \overset{\triangle}{ABD}$$

نسبت تشابه دو مثلث AEC و ABD، برابر نسبت دو ضلع $\frac{AC}{AB}$ یعنی $k = \frac{\sqrt{۸}}{۲}$ است، پس نسبت مساحت آن‌ها برابر است با:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AEC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABD}}} = k^۲ = (\frac{\sqrt{۸}}{۲})^۲ = ۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۹۰** با توجه به روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:




$$\overset{\triangle}{ABC} : AH^۲ = BH \times HC \Rightarrow h^۲ = \frac{۵}{۴} \times ۵ \Rightarrow h^۲ = \frac{۲۵}{۴} \Rightarrow h = \frac{۵}{۲}$$

با توجه به تعمیم تالس داریم:

$$\overset{\triangle}{AHC} : AH \parallel NM \Rightarrow \frac{h'}{h} = \frac{۵-x}{۵} \Rightarrow \frac{h'}{\frac{۵}{۲}} = \frac{۵-x}{۵} \Rightarrow h' = \frac{۵-x}{۲} \quad (*)$$

از طرفی:

$$\overset{\triangle}{NHC} : (h')^۲ = x(۵-x) \Rightarrow (\frac{۵-x}{۲})^۲ = x(۵-x) \Rightarrow \frac{۵-x}{۴} = x \Rightarrow ۵-x = ۴x \Rightarrow x = ۱$$

$$(*) \Rightarrow h' = ۲ \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{NHM}} = \frac{۱}{۲} \times h' \times x = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۱ = ۱$$

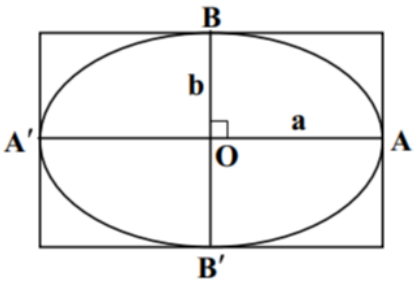
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۹۱** فاصلهٔ کانونی بیضی برابر ۱۲ است، یعنی $۲c = ۱۲$

همچنین خروج از مرکز بیضی برابر $۰/۸$ است؛ یعنی:

$$e = ۰/۸ \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \frac{۲c}{۲a} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow ۲a = ۱۵$$

بنابراین طول قطر بزرگ برابر $۲a = ۱۵$ است. می‌دانیم مساحت مستطیل برابر است با:




$$S = AA' \times BB' = ۲a \times ۲b$$

برای یافتن طول قطر کوچک $(۲b)$، رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ را می‌توان به‌صورت $(۲a)^۲ = (۲b)^۲ + (۲c)^۲$ نیز در نظر گرفت:

$$(۲a)^۲ = (۲b)^۲ + (۲c)^۲ \Rightarrow ۱۵^۲ = (۲b)^۲ + ۱۲^۲ \Rightarrow (۲b)^۲ = ۲۲۵ - ۱۴۴ \Rightarrow (۲b)^۲ = ۸۱ \Rightarrow ۲b = ۹$$

بنابراین مساحت مستطیل موردنظر برابر است با:

$$S = ۲a \times ۲b = ۱۵ \times ۹ = ۱۳۵$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۹۲** با توجه به فرض سؤال، نقاط $F(۲,-۳)$ و $F'(-۴,-۳)$ کانون‌های بیضی هستند، بنابراین:

$$۲c = ۲-(-۴) = ۶ \Rightarrow c = ۳ \quad (۱)$$

از طرفی خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۱}{۳}$ است، پس داریم:

$$e = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۱}{۳} \xrightarrow{(۱)} \frac{۳}{a} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow a = ۹ \quad (۲)$$

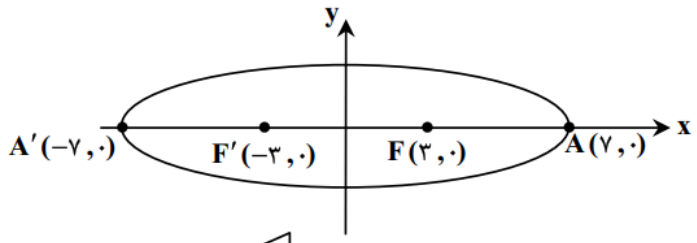
اکنون مقدار $b$ را به‌دست می‌آوریم:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۸۱ = b^۲ + ۹ \Rightarrow b^۲ = ۷۲ \Rightarrow b = \sqrt{۷۲} = ۶\sqrt{۲}$$

پس طول قطر کوچک بیضی برابر $۲b = ۱۲\sqrt{۲}$ است.

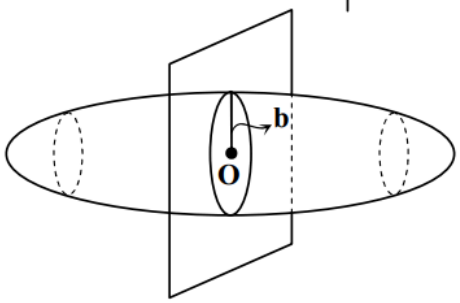
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۹۳**




بیضی مدنظر یک بیضی افقی مطابق شکل روبه‌رو است که مرکز آن مبدأ مختصات بوده و در آن $a = ۷$ و $c = ۳$؛ بنابراین مقدار $b$ برابر است با:

$$b = \sqrt{a^۲ - c^۲} = \sqrt{۷^۲ - ۳^۲} = \sqrt{۴۹ - ۹} = \sqrt{۴۰}$$




شکل دوران‌یافته، یک شکل بیضوی است که سطح مقطع آن با صفحهٔ $P$، یک دایره به شعاع $b$ می‌سازد. مساحت این سطح مقطع برابر است با:

$$S = \pi b^۲ = \pi \times \sqrt{۴۰}^۲ = ۴۰\pi$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۹۴** معادلهٔ یک دایره باید به فرم $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ قابل نوشتن باشد. بنـابراین در معادلـهٔ $۲x^۲+ky^۲+۸x-۱۲y+c=۰$ بایـد ضریب $x^۲$ و ضریب $y^۲$ برابر باشد. یعنی $k=۲$ و معادلهٔ دایره به‌صورت زیر است:

$$۲x^۲+۲y^۲+۸x-۱۲y+c=۰ \Rightarrow x^۲+y^۲+۴x-۶y+\frac{c}{۲}=۰$$

برای آنکه این رابطه، معادلهٔ یک دایره باشد، باید:

$$۴^۲+(-۶)^۲-۴\times\frac{c}{۲}>۰ \Rightarrow ۱۶+۳۶-۲c>۰ \Rightarrow ۲c<۵۲ \Rightarrow c<۲۶$$

با توجه به اینکه $k=۲$ و $c<۲۶$، آنگاه $k+c<۲۸$. بنابراین تنها گزینهٔ ۲ (۲۷) می‌تواند مقدار $k+c$ باشد.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۹۵** ابتدا مختصات مرکز و شعاع هر دو دایره را مشخص می‌کنیم:

$$C: x^۲+y^۲+۴x+۶y-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} O(-\frac{۴}{۲},-\frac{۶}{۲})=(-۲,-۳) \\ r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۳۶-۴(-۳)}=۴ \end{cases}$$

$$C': (x+۲)^۲+y^۲=m \Rightarrow \begin{cases} O'(-۲,۰) \\ r'=\sqrt{m} \end{cases}$$

حال $d=OO'$ (خط‌المرکزین) را به‌دست می‌آوریم:

$$d=\sqrt{(-۲-(-۲))^۲+(-۳-۰)^۲}=\sqrt{۰+۹}=۳$$

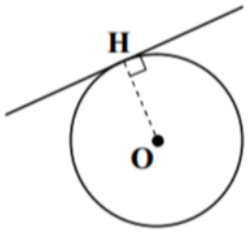
برای اینکه دو دایره مماس درون باشند، باید $d=|r-r'|$ باشد، پس داریم:

$$|۴-\sqrt{m}|=۳ \Rightarrow \begin{cases} ۴-\sqrt{m}=۳ \Rightarrow \sqrt{m}=۱ \Rightarrow m=۱ \\ ۴-\sqrt{m}=-۳ \Rightarrow \sqrt{m}=۷ \Rightarrow m=۴۹ \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای $m$ برابر ۵۰ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۹۶** مطابق شکل فرضی مقابل، فاصلهٔ مرکز دایره تا خط $y-x=۱$ برابر شعاع دایره است. بنابراین:




$$\begin{cases} O(-۲,۱) \\ x-y+۱=۰ \end{cases} \Rightarrow OH=r=\frac{|-۲-۱+۱|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

اکنون معادلهٔ دایره‌ای با مرکز $O(-۲,۱)$ و شعاع $r=\sqrt{۲}$ را می‌نویسیم:

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲ \Rightarrow (x+۲)^۲+(y-۱)^۲=۲ \quad (*)$$

حال کافی است محل برخورد دایره را با محور طول‌ها به‌دست آوریم:

$$y=۰ \xrightarrow{(*)} (x+۲)^۲+(۰-۱)^۲=۲ \Rightarrow (x+۲)^۲=۱ \Rightarrow \begin{cases} x+۲=۱ \Rightarrow x=-۱ \\ x+۲=-۱ \Rightarrow x=-۳ \end{cases}$$

پس دایره محور طول‌ها را در نقاط $A(-۱,۰)$ و $B(-۳,۰)$ قطع می‌کند و طول وتر جداشده روی محور طول‌ها برابر $AB=۲$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۹۷** ابتدا معادلهٔ دایرهٔ $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ را به‌صورت گسترده می‌نویسیم:

$$(x-1)^2+(y+2)^2=5 \Rightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4=5 \Rightarrow x^2+y^2-2x+4y=0$$

طبق فرض سؤال، دو دایره در نقاط A و B متقاطع هستند؛ پس معادلهٔ دو دایره را باهم برابر قرار می‌دهیم:

$$x^2+y^2-2x+4y=x^2+y^2-4x \Rightarrow 4y=-2x \Rightarrow x=-2y \quad (*)$$

حال در معادلهٔ یکی از دایره‌ها، به‌جای x مقدار $-2y$ را قرار می‌دهیم:

$$x^2+y^2-4x=0 \xrightarrow{(*)} 4y^2+y^2+8y=0 \Rightarrow 5y^2+8y=0 \Rightarrow y(5y+8)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \xrightarrow{(*)} x=0 \\ y=-\frac{8}{5} \xrightarrow{(*)} x=\frac{16}{5} \end{cases}$$

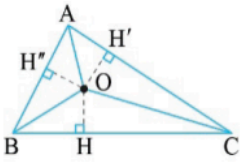
پس $A(0,0)$ و $B(\frac{16}{5},-\frac{8}{5})$ هستند و طول AB برابر است با:

$$AB=\sqrt{(\frac{16}{5})^2+(-\frac{8}{5})^2}=\sqrt{\frac{256}{25}+\frac{64}{25}}=\sqrt{\frac{320}{25}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$$

(دقت کنید به خط $x=-2y$ وتر مشترک دو دایره می‌گوییم.)

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۲۹۸** در هر مثلث، نیمسازهای داخلی همرس هستند و نقطهٔ همرسی آن‌ها از سه ضلع مثلث به یک فاصله است. [چون هر نقطه روی نیمساز، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است] یعنی در مثلث مقابل $OH=OH'=OH''$ است.




(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

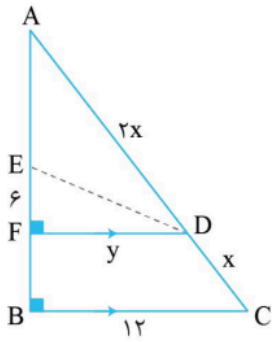
**۲۹۹** در مثلث ABC ، دو ضلع BC و FD موازی‌اند. از آن‌جایی که $\frac{AD}{DC}=2$ اســت، پس با فرض $DC=x$ نتیجه می‌شود $AD=2x$ است.

حالا با کمک قضیه تالس (جزء به کل) داریم:

$$\frac{AD}{AC}=\frac{FD}{BC} \Rightarrow \frac{2x}{3x}=\frac{y}{12} \Rightarrow y=8$$

حالا به مثلث قائم‌الزاویهٔ EDF توجه کنید:

در این مثلث طبق قضیهٔ تالس داریم:




$$(ED)^2=(FD)^2+(EF)^2 \Rightarrow (ED)^2=8^2+6^2=100 \Rightarrow ED=10$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

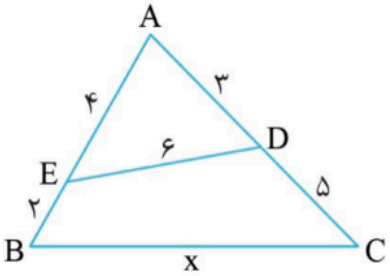
**۳۰۰** دو مثلث ABC و ABD در زاویهٔ $\hat{A}$ مشـــترک‌اند و همچنین دارای ۲ زاویهٔ برابر $A\hat{B}D$ و $B\hat{C}A$ هســـتند؛ بنابراین دو مثلث به حالت تســـاوی ۲ زاویه، متشابه‌اند. در ضمن، از آن‌جایی که مساحت مثلث ABC، $\frac{۱۶}{۹}$ برابر مساحت مثلث ABD است، پس نسبت تشابه آن‌ها برابر $\sqrt{\frac{۱۶}{۹}}=\frac{۴}{۳}$ است. حالا با نوشتن نسبت تشابه برای اضلاع این دو مثلث طول CD را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AB}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\begin{cases}\frac{AB}{AD}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\frac{۱۲}{AD}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow AD=۹\\ \frac{AC}{AB}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\frac{AC}{۱۲}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow AC=۱۲\end{cases}$$

بنابراین CD برابر است با: $CD=AC-AD=۱۲-۹=۳$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

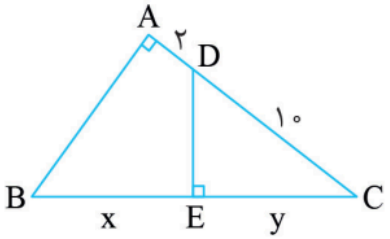
**۳۰۱** چون دو مثلث ABC و ADE متشابه‌اند، پس با نوشتن نسبت تشابه برای اضلاع دو مثلث داریم:




$$\frac{BC}{ED}=\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}\Rightarrow\frac{x}{۶}=\frac{۸}{۴}=\frac{۶}{۳}\Rightarrow x=۲$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۳۰۲** چون دو مثلث ABC و DEC در زاویهٔ $\hat{C}$ مشترک هستند و همچنین یک زاویهٔ قائمه نیز دارند، پس به حالت تساوی ۲ زاویه متشابه‌اند. از طرفی، محیط مثلث ABC، ۱/۵ برابر محیط مثلث DEC است، پس نسبت تشابه آن‌ها برابر ۱/۵ است. بنابراین با نوشتن نسبت تشابه برای اضلاع این دو مثلث، طول پاره‌خط BE را پیدا می‌کنیم:

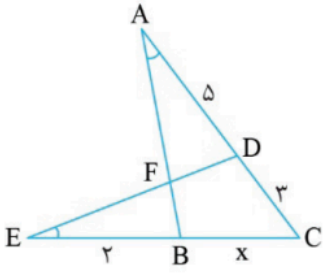



$$\frac{BC}{DC}=\frac{AC}{EC}=۱/۵\Rightarrow\frac{x+y}{۱۰}=\frac{۱۲}{y}=۱/۵$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{۱۲}{y}=۱/۵\Rightarrow y=۸\\ \frac{x+y}{۱۰}=۱/۵\Rightarrow\frac{x+۸}{۱۰}=۱/۵\Rightarrow x=۷\end{cases}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۳۰۳** دو مثلث ABC و DEC در رأس $\hat{C}$ مشترک‌اند و دارای دو زاویهٔ برابر $B\hat{A}C$ و $D\hat{E}C$ هستند. بنابراین به حالت تساوی ۲ زاویه متشابه‌اند و داریم:

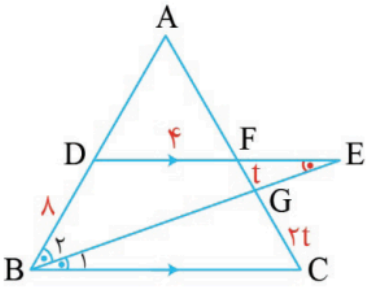



$$\frac{BC}{CD}=\frac{AC}{EC}\Rightarrow\frac{x}{۳}=\frac{۸}{۲+x}\Rightarrow x^۲+۲x=۲۴$$

$$\Rightarrow x^۲+۲x-۲۴=۰\Rightarrow(x+۶)(x-۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۴\ \checkmark\\ x=-۶\ \times\end{cases}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۳۰۴** چون DE و BC موازی‌اند و BE مورب است، پس $\hat{B}_1 = \hat{E}$ است. بنابراین مثلث BDE متساوی‌الساقین است و در نتیجه $BD = DE = ۸$ است، پس:




$$DE = ۸ \Rightarrow DF + FE = ۸ \Rightarrow ۴ + FE = ۸ \Rightarrow FE = ۴$$

حـــالا به دو مثلث BCG و EFG نگاه کنید. این دو مثلث در رأس G، متقابل به رأس هســـتند و $\hat{B}_1 = \hat{E}$ است. پس به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند. بنابراین:

$$\frac{BC}{FE} = \frac{CG}{FG} \Rightarrow \frac{BC}{۴} = \frac{۲t}{t} \Rightarrow BC = ۸$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۳۰۵** باتوجه به روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$(BD)^۲ = AD \times CD = ۳ \times ۶ \Rightarrow BD = ۳\sqrt{۲}$$

حالا در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCD، طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

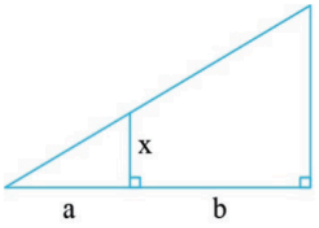
$$(BC)^۲ = (BD)^۲ + (CD)^۲ \Rightarrow (BC)^۲ = (۳\sqrt{۲})^۲ + ۶^۲ = ۵۴ \Rightarrow BC = \sqrt{۵۴}$$

حالا به کمک روابط طولی در همین مثلث BCD داریم:

$$(BD)^۲ = BE \times BC \Rightarrow ۱۸ = x \times \sqrt{۵۴} \Rightarrow x = \frac{۱۸}{۳\sqrt{۶}} = \sqrt{۶}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

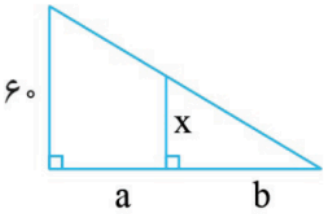
**۳۰۶** باتوجه به شکل‌های داده شده، کافی است دوبار از قضیهٔ تالس استفاده کنیم. باتوجه به شکل مقابل، داریم:



شکل(۱)

$$\frac{x}{۱۲۰} = \frac{a}{a+b}$$

همچنین در شکل مقابل، خواهیم داشت:



شکل(۲)

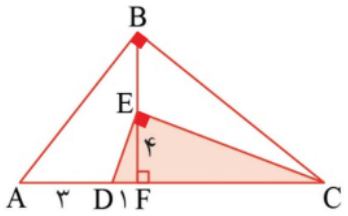
$$\frac{x}{۶۰} = \frac{b}{a+b}$$

حالا طرفین این دو رابطه را با هم جمع می‌کنیم:

$$\frac{x}{۱۲۰} + \frac{x}{۶۰} = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \Rightarrow \frac{۳x}{۱۲۰} = ۱ \Rightarrow x = ۴۰$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۳۰۷** در مثلث قائم‌لزاویهٔ CED داریم:



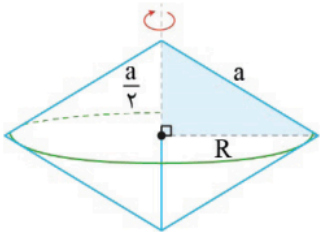

$$EF^۲ = DF \times FC \Rightarrow ۴^۲ = ۱ \times FC \Rightarrow FC = ۱۶$$

حالا به مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC توجه کنید:

$$BC^۲ = CF \times CA = ۱۶ \times ۲۰ \Rightarrow BC = ۸\sqrt{۵}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۳۰۸** شکل حاصل دو مخروط یکسان است که از قاعده به هم چسبیده‌اند. ابتدا شعاع قاعده را با کمک قضیهٔ فیثاغورس پیدا می‌کنیم:




$$R^۲ + (\frac{a}{۲})^۲ = a^۲ \Rightarrow R^۲ = a^۲ - \frac{a^۲}{۴} = \frac{۳a^۲}{۴} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین حجم شکل حاصل برابر است با:

$$V = ۲ \times (\frac{۱}{۳}\pi R^۲ \times \frac{a}{۲}) = ۲ \times (\frac{۱}{۳}\pi(\frac{a\sqrt{۳}}{۲})^۲ \times \frac{a}{۲})$$

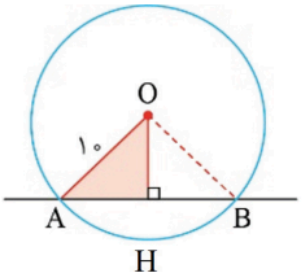
$$\Rightarrow V = ۲ \times (\frac{۱}{۳}\pi \times \frac{۳a^۲}{۴} \times \frac{a}{۲}) = \frac{\pi a^۳}{۴} \xrightarrow{a=۲} V = \frac{\pi \times ۸}{۴} = ۲\pi$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۳۰۹** مختصات مرکز دایرهٔ $(x+۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۱۰۰$ به صورت $O(-۲,۳)$ و شعاع آن برابر $R = ۱۰$ است. مطابق شکل، این دایره و خط $۳x - ۴y - ۱۲ = ۰$ در نقطهٔ A و B متقاطع‌اند. فاصلهٔ مرکز دایره از خط برابر است با:

$$OH = \frac{|۳(-۲) - ۴(۳) - ۱۲|}{\sqrt{۳^۲ + (-۴)^۲}} = \frac{۳۰}{۵} = ۶$$

حالا به کمک رابطهٔ فیثاغورس داریم:




$$(OA)^۲ = (AH)^۲ + (OH)^۲ \Rightarrow AH = \sqrt{۱۰^۲ - ۶^۲} = \sqrt{۶۴} = ۸$$

بنابراین $AB = ۲ \times ۸ = ۱۶$ است و مساحت مثلث OAB برابر است با:

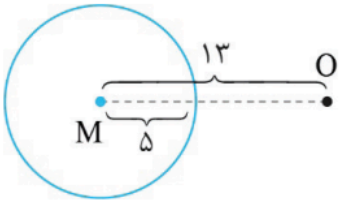
$$S_{OAB} = \frac{۱}{۲} \times AB \times OH = \frac{۱}{۲} \times ۱۶ \times ۶ = ۴۸$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۳۱۰** در دایرهٔ $(x+۵)^۲+(y-۱۲)^۲=۲۵$ به صورت $M(-۵,۱۲)$ و شعاع دایره برابر $R=۵$ است. فاصلهٔ نقطهٔ مبدأ مختصات را از مرکز دایره پیدا می‌کنیم:

$$OM=\sqrt{(-۵-۰)^۲+(۱۲-۰)^۲}=\sqrt{۲۵+۱۴۴}=\sqrt{۱۶۹}=۱۳$$

چون $OM>R$ است، پس نقطهٔ $O$ بیرون دایره قرار دارد و کمترین فاصلهٔ نقاط دایره از مبدأ برابر است با: $۱۳-۵=۸$

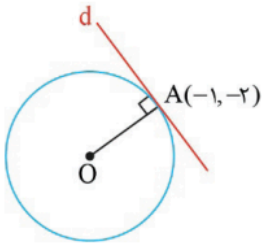



(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۳۱۱** مختصات مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲-۳x+۲y-۴=۰$ را پیدا می‌کنیم:

$$O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(\frac{۳}{۲},-۱)$$

در ضمن، می‌دانیم شعاع دایره، در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است. بنابراین:




$$m_{OA}=\frac{y_O-y_A}{x_O-x_A}=\frac{-۱-(-۲)}{\frac{۳}{۲}-(-۱)}=\frac{۱}{\frac{۵}{۲}}=\frac{۲}{۵}$$

$$\Rightarrow m_d=-\frac{۱}{m_{OA}}=-\frac{۵}{۲}$$

حالا با داشتن شیب خط $d$ و نقطهٔ $A(-۱,-۲)$ روی آن، معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم:

$$d: y-(-۲)=-\frac{۵}{۲}(x-(-۱))\Rightarrow y+۲=-\frac{۵}{۲}x-\frac{۵}{۲}\xrightarrow{\times ۲}۲y+۵x+۹=۰$$

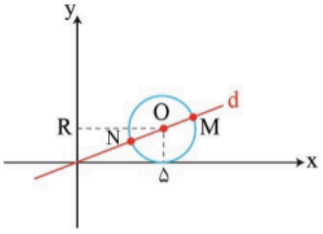
(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۳۱۲** چون دایره در نقطهٔ $A(۵,۰)$ بر محور $x$ها مماس است، پس مختصات مرکز آن به صورت $O(۵,R)$ است. در ضمن فاصلهٔ نقطهٔ $O$ از $M$ نیز برابر شعاع دایره است:

$$OM=R\Rightarrow\sqrt{(۸-۵)^۲+(۶-R)^۲}=R\xrightarrow{\text{توان ۲}}۹+۳۶-۱۲R+R^۲=R^۲$$

$$\Rightarrow ۱۲R=۴۵\Rightarrow R=\frac{۱۵}{۴}$$

بنابراین مختصات مرکز دایره به صورت $O(۵,\frac{۱۵}{۴})$ است. در ضمن چون نقاط $M$ و $N$ دو سر یک قطر دایره هستند، پس نقطهٔ $O$ وسط آن‌ها قرار دارد.

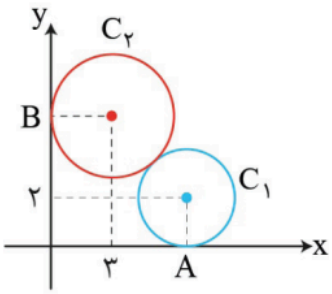



$$\begin{cases}x_O=\frac{x_N+x_M}{۲}\Rightarrow ۵=\frac{x_N+۸}{۲}\Rightarrow x_N=۲\\ y_O=\frac{y_N+y_M}{۲}\Rightarrow \frac{۱۵}{۴}=\frac{y_N+۶}{۲}\Rightarrow y_N=۱/۵\end{cases}$$

بنابراین $N(۲,۱/۵)$ است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۳۱۳** باتوجه به صورت سوال، وضعیت دو دایره به صورت مقابل است:




مرکز دایرهٔ $C_1$ به صورت $O_1(a,2)$ و مرکز دایرهٔ $C_2$ به صورت $O_2(3,a)$ اســت. چون دو دایره مماس خارج هستند، پس:

$$O_1O_2 = R_1 + R_2 \Rightarrow \sqrt{(a-3)^2 + (2-a)^2} = 2+3$$

$$\Rightarrow (a^2 - 6a + 9) + (a^2 - 4a + 4) = 25 \Rightarrow 2a^2 - 10a - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 2(a+1)(a-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \times \\ a = 6 \checkmark \end{cases}$$

باتوجه به صورت سوال $a > 0$ است، پس $a = 6$ قابل قبول است و فاصلهٔ دو نقطه $A$ و $B$ برابر است با: $AB = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۳۱۴** مختصات مرکز هر دایره را پیدا می‌کنیم:

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \ : \ O_1(0,1)$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 4 \ : \ O_2(-2,0)$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1 \ : \ O_3(1,-1)$$

حالا معادلهٔ دایره‌ای را می‌خواهیم که از نقاط $O_1(0,1)$ و $O_2(-2,0)$ و $O_3(1,-1)$ بگذرد. این نقاط را در معادلهٔ $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ جایگذاری می‌کنیم:

$$O_1(0,1): 0 + 1 + 0 + b + c = 0 \Rightarrow b + c = -1 \quad (1)$$

$$O_2(-2,0): 4 + 0 - 2a + 0 + c = 0 \Rightarrow -2a + c = -4 \quad (2)$$

$$O_3(1,-1): 1 + 1 + a - b + c = 0 \Rightarrow a - b + c = -2 \quad (3)$$

حالا با کمک معادلات به دست آمده داریم:

$$\begin{matrix} \xrightarrow{(1)-(2)} b + 2a = 3 \\ \xrightarrow{(3)-(2)} 3a - b = 2 \end{matrix} \Rightarrow a = 1, \ b = 1$$

با جایگذاری $b = 1$ در معادلهٔ (۱) نتیجه می‌گیریم $c = -2$ است. پس معادلهٔ دایره به صورت مقابل است:

$$x^2 + y^2 + x + y - 2 = 0 \Rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{1+1+8} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

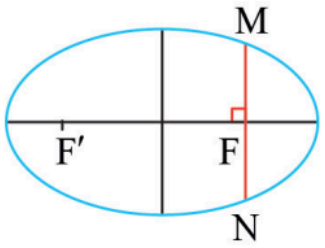
**۳۱۵** خــط $y + 2x = 4$ محــور $x$ ها را در نقطــه‌ای به طــول ۲ و محور $y$ ها را در نقطــه‌ای به عرض ۴ قطــع می‌کند. پس $OF = c = 2$ و $OB = b = 4$ است. باتوجه به رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2$ داریم:

$$a^2 = 4^2 + 2^2 = 20 \Rightarrow a = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

بنابراین طول بزرگ‌ترین قطر بیضی برابر $2a = 4\sqrt{5}$ است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۳۱۶** طول قطر بزرگ برابر $۲a = ۴\sqrt{۲}$ و طول قطر کوچک برابر $۲b = ۴$ است. پس $a = ۲\sqrt{۲}$ و $b = ۲$ است و طول کوتاه‌ترین وتری که از کانون بیضی می‌گذرد، برابر است با:




$$\Rightarrow MN = \frac{۲b^۲}{a} = \frac{۲\times ۲^۲}{۲\sqrt{۲}} = \frac{۴}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۳۱۷** طول قطر کوچک بیضی برابر $۲b = ۴$ است، پس $b = ۲$ است. در حالت اول، چون نقاط $(\sqrt{۵},۰)$ و $(-\sqrt{۵},۰)$ دو سر قطر بزرگ بیضی هستند، پس $a_۱ = \sqrt{۵}$ است و داریم:

$$a_۱^۲ = b^۲ + c_۱^۲ \Rightarrow (\sqrt{۵})^۲ = ۲^۲ + c_۱^۲ \Rightarrow c_۱^۲ = ۱ \Rightarrow c_۱ = ۱$$

پس خروج از مرکز بیضی در حالت اول برابر است با: $e_۱ = \frac{c_۱}{a_۱} = \frac{۱}{\sqrt{۵}}$

در حالت دوم، بیضی را در راستای افقی منبسط می‌کنیم، پس در این حالت طول قطر کوچک تغییر نمی‌کند و در نتیجه $b = ۲$ است. چون دو سر قطر بزرگ روی نقاط $(۴,۰)$ و $(-۴,۰)$ قرار می‌گیرند، پس $a_۲ = ۴$ است و داریم:

$$a_۲^۲ = b^۲ + c_۲^۲ \Rightarrow ۴^۲ = ۲^۲ + c_۲^۲ \Rightarrow c_۲^۲ = ۱۶ - ۴ = ۱۲ \Rightarrow c_۲ = ۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow e_۲ = \frac{c_۲}{a_۲} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین نسبت خروج از مرکز در حالت جدید به حالت اولیه برابر است با:

$$\frac{e_۲}{e_۱} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{\sqrt{۵}}} = \frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$$

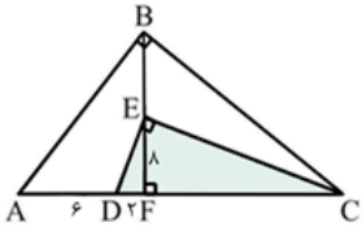
(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۳۱۸** دو مثلث ABC و ACD در رأس $\hat{C}$ مشترک هستند و دو زاویهٔ $A\hat{B}C$ و $C\hat{A}D$ در آن‌ها برابر هستند. پس این دو مثلث به حالت برابری دو زاویه متشابه‌اند:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{۱۳}{x} = \frac{x}{۴} \Rightarrow x^۲ = ۵۲ \Rightarrow x = ۲\sqrt{۱۳}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۳۱۹** مثلث قائم‌الزاویهٔ CED داریم:




$$EF^۲ = DF \times FC$$
$$\Rightarrow ۸^۲ = ۲ \times FC \Rightarrow FC = ۳۲$$

به مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC توجه کنید:

$$BF^۲ = AF \times FC = ۸ \times ۳۲ = ۲^۸ \Rightarrow BF = ۱۶$$

بنابراین $BE + EF = ۱۶$ است و در نتیجه $BE = EF = ۸$ است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۳۲۰** شرط این که معادلهٔ $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ معادلهٔ یک دایره باشد این است که $a^۲+b^۲-۴c>۰$ باشد، پس داریم:

$$x^۲+y^۲-(k+۱)x-۴y+k+۳=۰$$

شرط این که دایره باشد: $(k+۱)^۲+۱۶-۴(k+۳)>۰ \Rightarrow k^۲+۲k+۱+۱۶-۴k-۱۲>۰$

$$\Rightarrow k^۲-۲k+۵>۰ \Rightarrow \begin{cases}\Delta<۰\\ a>۰\end{cases} \Rightarrow \text{عبارت درجه دوم همواره مثبت}$$

بنابراین شرط $a^۲+b^۲-۴c>۰$ همواره (به ازای هر مقدار k) برقرار است، پس به ازای بی‌شمار عدد صحیح، معادلهٔ داده شده، معادله یک دایره است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۳۲۱** ابتدا مختصات مرکز و شعاع‌های دو دایره را تعیین می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲-۴x+۴y-۱=۰ \Rightarrow O_۱(۲,-۲)\ ,R_۱=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۱۶+۴}=۳$$

$$x^۲+y^۲-۴x+۸y+۱۹=۰ \Rightarrow O_۲(۲,-۴)\ ,\ R_۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۶۴-۷۶}=۱$$

طول خط‌المرکزین: $O_۱O_۲=\sqrt{(۲-۲)^۲+(-۴+۲)^۲}=\sqrt{۴}=۲$

$$R_۱+R_۲=۴\ ,\ |R_۱-R_۲|=۲$$

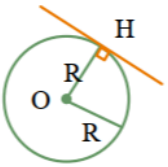
چون $O_۱O_۲=|R_۱-R_۲|$ است، پس دو دایره، مماس داخل هستند.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۳۲۲** فاصلهٔ مرکز دایره از هر نقطه روی آن برابر با فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس بر آن است، زیرا هر دو برابر شعاع دایره هستند:

$$O(۱,-۴)\quad A(۵,۲) \Rightarrow OA=\sqrt{(۵-۱)^۲+(۲+۴)^۲} \Rightarrow OA=\sqrt{۵۲} \Rightarrow R=\sqrt{۵۲}=۲\sqrt{۱۳}$$

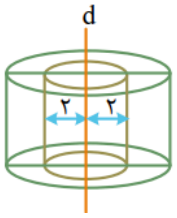
$$۲x-۳y-a=۰\ ,\ O(۱,-۴) \Rightarrow OH=\frac{|۲(۱)-۳(-۴)-a|}{\sqrt{۴+۹}} \Rightarrow \frac{|۱۴-a|}{\sqrt{۱۳}}=۲\sqrt{۱۳} \Rightarrow |۱۴-a|=۲۶$$




$$\Rightarrow ۱۴-a=\pm ۲۶ \Rightarrow \begin{cases}۱۴-a=۲۶ \Rightarrow a=-۱۲\\ ۱۴-a=-۲۶ \Rightarrow a=۴۰\end{cases} \Rightarrow a_۱+a_۲=۴۰-۱۲=۲۸$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۳۲۳** شکل حاصل از دوران مربع داده شده حول خط d یک استوانه به شعاع قاعدهٔ ۵ و ارتفاع ۳ است که یک استوانه به شعاع قاعدهٔ ۲ و ارتفاع ۳ از وسط آن خارج شده است، بنابراین حجم حاصل از دوران برابر است با:



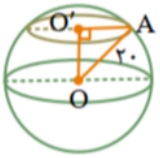

$$V=\pi(۵)^۲\times ۳-\pi(۲)^۲\times ۳=۷۵\pi-۱۲\pi=۶۳\pi \text{ مطلوب}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۳۲۴** فرض می‌کنیم صفحه، کره‌ای به شعاع ۲۰ را در دایره‌ای به شعاع $O'A$ قطع کند (مطابق شکل) چون مساحت سطح مقطع برابر $۱۰۰\pi$ است، پس داریم:

$$\pi(O'A)^۲=۱۰۰\pi \Rightarrow O'A=۱۰$$

از قضیه فیثاغورس در مثلث $OO'A$ نتیجه می‌شود:



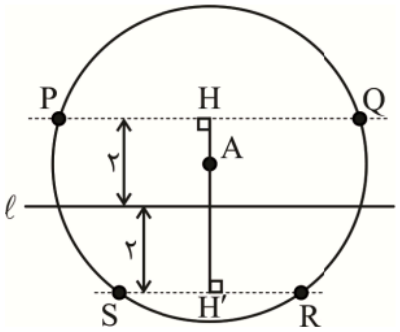

$$OO'^۲=OA^۲-O'A^۲=۲۰^۲-۱۰^۲=۴۰۰-۱۰۰=۳۰۰$$

$$\Rightarrow OO'=۱۰\sqrt{۳}$$

پس فاصلهٔ مرکز کره از صفحهٔ برش برابر $۱۰\sqrt{۳}$ است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

**۳۲۵** نقاطی که از $A$ به فاصلهٔ $\sqrt{۱۰}$ باشند، روی دایره به مرکز $A$ و شعاع $\sqrt{۱۰}$ هستند.
نقاطی که از $\ell$ به فاصله ۲ باشند، روی دو خط موازی $\ell$ در بالا و پایین به فاصلهٔ ۲ هستند.
پس نقاط مشترک رئوس ذوزنقه $PQRS$ هستند و داریم:



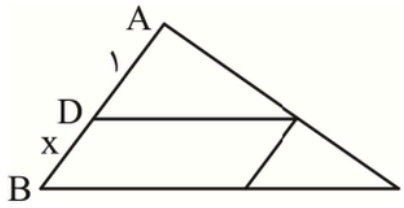

$$AH = ۱ \ , \ AP = \sqrt{۱۰}$$
$$\Rightarrow PH = ۳ \Rightarrow PQ = ۶$$
$$AH' = ۳ \ , \ AR = \sqrt{۱۰} \Rightarrow H'R = ۱ \Rightarrow SR = ۲$$

یعنی قاعده‌های ذوزنقه $PQ = ۶$ و $SR = ۲$ و ارتفاعش $HH' = ۴$ است و مساحتش می‌شود:

$$\frac{(۶+۲)۴}{۲} = ۱۶$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۳۲۶** اگر $D$ ضلع $AB$ را به نسبت ۱ به $x$ تقسیم کند، مثلث بالا و کل شکل به نسبت $\frac{۱}{x+۱}$ متشابه‌اند، پس نسبت مساحت‌ها $\frac{۱}{(x+۱)^۲}$ است.




همچنین مثلث کوچک سمت راست با شکل اصلی به نسبت $\frac{x}{x+۱}$ متشابه‌اند، پس نسبت مساحت‌هایشان $\frac{x^۲}{(x+۱)^۲}$ است. پس سهم متوازی‌الاضلاع برابر است با:

$$۱ - \frac{۱}{(x+۱)^۲} - \frac{x^۲}{(x+۱)^۲} = \frac{۴۰}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۲x}{(x+۱)^۲} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow x^۲ + ۲x + ۱ = ۵x$$
$$\Rightarrow x^۲ - ۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$$

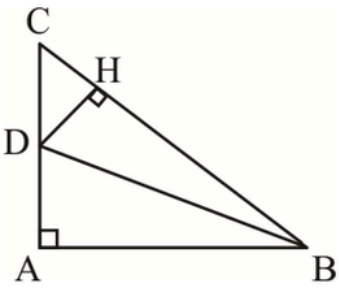
و نسبت می‌شود: $\frac{۱}{x} = \frac{۱}{\frac{۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}}$ یا $\frac{۲}{۳ \pm \sqrt{۵}}$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۳۲۷** با توجه به اینکه ارتفاع دو مثلث $BAD$ و $BDC$ یکسان است، نسبت قاعده‌های این دو مثلث برابر با نسبت مساحت‌هایشان خواهد بود.

همچنین هر نقطه روی نیم‌ساز، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است؛ بنابراین $AD = DH$.

حال نسبت مساحت‌ها را می‌نویسیم:




$$\frac{S_{BDC}}{S_{BAD}} = \frac{\frac{۱}{۲}\times DH\times(a+۸)}{\frac{۱}{۲}\times a\times AD} = \frac{a+۸}{a} = \frac{۱۳}{۵} \Rightarrow a = ۵$$

با توجه به اینکه مثلث قائم‌الزاویه است و دو ضلع را داریم: ضلع $AC$ را به‌دست می‌آوریم:

$$AC = \sqrt{۱۳^۲ - ۵^۲} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲$$

با توجه به اینکه $\frac{CD}{AD} = \frac{۱۳}{۵}$، داریم:

$$CD = \frac{۱۳}{۵}AD \Rightarrow AD + CD = AD + \frac{۱۳}{۵}AD \Rightarrow ۱۲ = \frac{۱۸}{۵}AD \Rightarrow AD = \frac{۵}{۱۸}\times ۱۲ = \frac{۱۰}{۳}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۳۲۸** طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{۲}{۱} = \frac{۳+x}{۳-x} \Rightarrow x = ۱$$

همچنین با توجه به اینکه زاویه $A$ در دو مثلث $ADE$ و $ABC$ مشترک است و نسبت اضلاع باهم تناسب دارند، داریم:

(دقت کنید $EC = (۲+x)+(۳-x) = ۵$)

$$\frac{\overbrace{AE}^{۱}}{\underbrace{AB}_{۳}} = \frac{\overbrace{AD}^{۲}}{\underbrace{AC}_{۶}} = \frac{\overbrace{DE}^{۲x+۱}}{\underbrace{BC}_{۳y+۳}} \Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{۲x+۱}{۳y+۳} \xrightarrow{x=۱} \frac{۱}{۳} = \frac{۳}{۳y+۳} \Rightarrow y = ۲$$

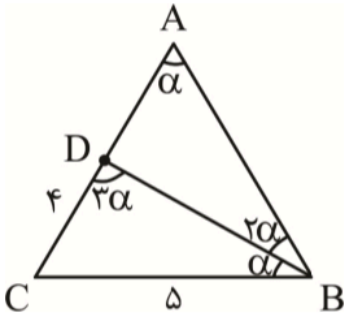
بنابراین:

$$x + y = ۱ + ۲ = ۳$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۳۲۹** با توجه به اطلاعات داده‌شده و اینکه زاویه $\widehat{BDC}$، زاویه خارجی مثلث $ABD$ است، شکل به‌صورت زیر خواهد بود:

بنابراین دو مثلث $ABC$ و $DBA$ با هم متشابه هستند:



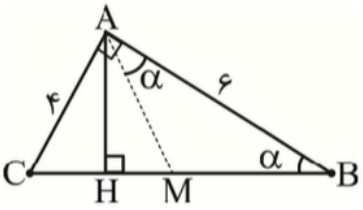

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{CD} = \frac{AB}{BD}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{AD+۴}{۵} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow AD + ۴ = \frac{۲۵}{۴} \Rightarrow AD = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۳۳۰** با توجه به‌شکل روبه‌رو با رسم ارتفاع $AH$ و میانهٔ $AM$ داریم:




$$AM = MB \Rightarrow \hat{MAB} = \hat{B} = \alpha$$

$$\text{زاویه خارجی } \hat{AMH} = ۲\alpha \Rightarrow \hat{HAM} = ۹۰ - ۲\alpha = ۹۰ - ۲\hat{B} = \hat{B} + \hat{C} - ۲\hat{B} = \hat{C} - \hat{B}$$

پس تانژانت زاویه $HAM$ را می‌خواهیم که برابر است با:

$$\tan \hat{HAM} = \frac{HM}{AH}$$

از طرفی طبق روابط طولی داریم:

$$BC^۲ = \sqrt{۴^۲ + ۶^۲} = \sqrt{۵۲}$$

$$AH = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{۲۴}{\sqrt{۵۲}}$$

$$AC^۲ = CH \times BC \Rightarrow CH = \frac{AC^۲}{BC} = \frac{۱۶}{\sqrt{۵۲}}$$

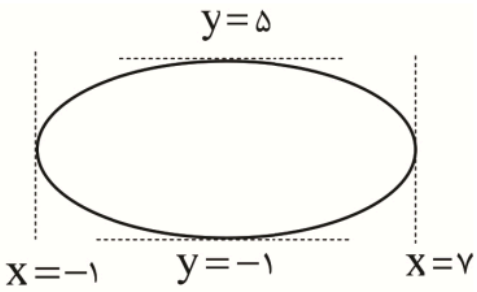
$$HM = CM - CH = \frac{\sqrt{۵۲}}{۲} - \frac{۱۶}{\sqrt{۵۲}} = \frac{۲۰}{۲\sqrt{۵۲}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۵۲}}$$

بنابراین:

$$\tan \hat{HAM} = \frac{۱۰}{۲۴} = \frac{۵}{۱۲}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۳۳۱**




طول قطرهای بیضی برابر است با:

$$۲b = ۵ - (-۱) = ۶$$

$$۲a = ۷ - (-۱) = ۸$$

پس:

$$c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۴^۲ - ۳^۲ = ۷$$

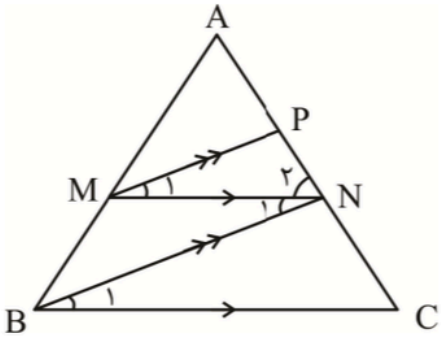
$$\Rightarrow c = \sqrt{۷}$$

مرکز بیضی در وسط $x$ و $y$ها، یعنی در $O(۳,۲)$ قرار دارد، پس دایره به مرکز $O(۳,۲)$ و شعاع $r = c = \sqrt{۷}$ داریم که معادله‌اش $(x-۳)^۲ + (y-۲)^۲ = \sqrt{۷}^۲$ است. با قرار دادن $y = ۰$ داریم:

$$(x-۳)^۲ + ۴ = ۷ \Rightarrow (x-۳)^۲ = ۳ \Rightarrow x = ۳ \pm \sqrt{۳}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳۲




با توجه به‌صورت سؤال داریم:

$$\begin{cases} MP \parallel BN \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \hat{M}_۱ = \hat{N}_۱ \\ MN \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \hat{N}_۱ = \hat{B}_۱ \ , \ \hat{N}_۲ = \hat{C} \end{cases} \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{N}_۱ = \hat{B}_۱ \ , \ \hat{N}_۲ = \hat{C}$$

بنابراین دو مثلث $MPN$ و $BNC$ متشابه هستند و با توجه به نسبت داده‌شده داریم:

$$\frac{S_{MNP}}{S_{BNC}} = \frac{۹}{۴۹} \Rightarrow \begin{cases} S_{MNP} = ۹s \\ S_{BNC} = ۴۹s \end{cases}$$

$$\frac{S_{MNP}}{S_{BNC}} = (\frac{MN}{BC})^۲ = \frac{۹}{۴۹} \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{۳}{۷}$$

حال در ذوزنقه $MNCB$ داریم:

$$\frac{S_{BMN}}{S_{BNC}} = \frac{MN}{BC} = \frac{۳}{۷} \Rightarrow S_{BMN} = \frac{۳}{۷} \times ۴۹s = ۲۱s$$

طبق قضیه تالس $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ و همچنین داریم:

$$\overset{\Delta}{AMP} \sim \overset{\Delta}{ABN} \Rightarrow \frac{S_{AMP}}{S_{ABN}} = (\frac{AM}{AB})^۲ = (\frac{MN}{BC})^۲ = \frac{۹}{۴۹}$$

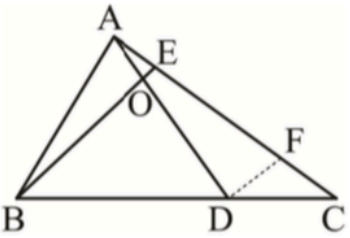
$$\Rightarrow \frac{S_{AMP}}{S_{AMP} + ۳۰s} = \frac{۹}{۴۹} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{S_{AMP}}{۳۰s} = \frac{۹}{۴۰} \Rightarrow S_{AMP} = \frac{۲۷}{۴}s$$

درنهایت داریم:

$$\frac{S_{BMN}}{S_{AMP}} = \frac{۲۱s}{\frac{۲۷}{۴}s} = \frac{۲۸}{۹}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۳۳۳** با توجه به اطلاعات داده‌شده داریم:




$$\frac{OA}{OD}=\frac{۱}{۴} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{OA}{AD}=\frac{۱}{۵}$$

از $D$ خطی موازی $BE$ رسم می‌کنیم تا $AC$ را در $F$ قطع کند.

طبق قضیه تالس در مثلث $ADF$ داریم:

$$\frac{OA}{AD}=\frac{OE}{DF}=\frac{۱}{۵}\ (I)$$

حال در مثلث $BCE$ طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{DF}{BE}=\frac{DC}{BC}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{BE}{DF}=۴\ (II)$$

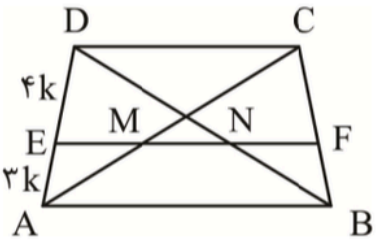
با توجه به $(I)$ و $(II)$ داریم:

$$\begin{cases}\frac{OE}{DF}=\frac{۱}{۵}\\ \frac{BE}{DF}=۴\end{cases}\xrightarrow{\text{تقسیم دو رابطه}}\frac{OE}{BE}=\frac{۱}{۲۰}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۳۳۴** با توجه به نسبت‌های داده‌شده، طبق عکس قضیه تالس، می‌توان نتیجه گرفت $AB \parallel EF \parallel DC$.

حال داریم:




$$\overset{\Delta}{ACD}: ME \parallel CD \Rightarrow \frac{ME}{CD}=\frac{AE}{AD}\Rightarrow\frac{ME}{۶}=\frac{۳}{۷}\Rightarrow ME=\frac{۱۸}{۷}$$

$$\overset{\Delta}{ABD}: NE \parallel AB \Rightarrow \frac{NE}{AB}=\frac{DE}{AD}\Rightarrow\frac{NE}{۱۰}=\frac{۴}{۷}\Rightarrow NE=\frac{۴۰}{۷}$$

$$\Rightarrow MN=NE-ME=\frac{۴۰}{۷}-\frac{۱۸}{۷}=\frac{۲۲}{۷}$$

حال با توجه به موازی بودن $CD$ و $MN$ و خط مورب $MC$ می‌توان گفت:

$$\overset{\Delta}{OCD}\sim\overset{\Delta}{OMN}\Rightarrow\frac{S_{MON}}{S_{OCD}}=(\frac{MN}{CD})^{۲}=(\frac{\frac{۲۲}{۷}}{۶})^{۲}=\frac{۱۲۱}{۴۴۱}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۳۳۵** نیمساز مکان هندسی نقاطی است که از هر دو ضلع زاویه به یک فاصله باشند، بنابراین $ED = EF$ ، $AB = BC$ و در نتیجه $OD = OF$ و $OC = OA$.

حال داریم:

$$OE^۲ = EF^۲ + OF^۲ \Rightarrow ۲۲۵ = EF^۲ + ۸۱ \Rightarrow EF^۲ = ۱۴۴ \Rightarrow EF = ۱۲$$

همچنین طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{OF}{OC} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{۹}{۱۲} = \frac{۱۲}{BC} \Rightarrow BC = ۱۶$$

برای پیدا کردن خواستهٔ سؤال، مساحت $OEF$ را از مساحت $OBC$ کم می‌کنیم و سپس دو برابر می‌کنیم:

$$۲(S_{OBC} - S_{OEF}) = ۲(\frac{۱۲\times۱۶}{۲} - \frac{۹\times۱۲}{۲}) = ۱۹۲ - ۱۰۸ = ۸۴$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۳۳۶** طبق قضیهٔ تالس داریم:

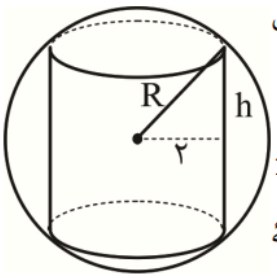
$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{a-۱}{a} = \frac{a+۱}{a+۳} \Rightarrow a^۲ + a = a^۲ + ۲a - ۳ \Rightarrow a = ۳$$

حالا از تناسب جزء به کل داریم:

$$\frac{a-۱}{a+a-۱} = \frac{a}{a+b} \xrightarrow{a=۳} \frac{۲}{۵} = \frac{۳}{۳+b} \Rightarrow b = ۴/۵$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۳۳۷** ارتفاع استوانه را $۲h$ فرض می‌کنیم.




با توجه به شکل رابطهٔ $R^۲ = ۳۶ = r^۲ + h^۲$ برقرار است. همچنین با توجه به‌صورت سؤال پس داریم: $\pi r^۲(۲h) = ۱۲\sqrt{۳۰}\pi$

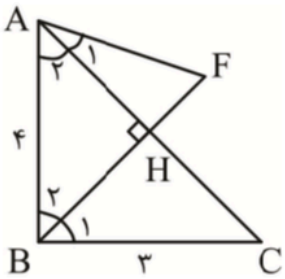
$$r^۲h = ۶\sqrt{۳۰} \rightarrow r^۴h^۲ = ۳۶\times۳۰ \xrightarrow{h^۲=۳۶-r^۲} r^۴\times(۳۶-r^۲) = ۳۶\times۳۰$$

با کمی دقت در معادله متوجه می‌شویم که $۳۶ - r^۲ = ۳۰$ و $r^۴ = ۳۶$، یعنی $r = \sqrt{۶}$ خواستهٔ سؤال حاصل‌ضرب مساحت قاعدهٔ استوانه و مساحت دایره با شعاع ۶ است، داریم:

$$۳۶\pi\times۶\pi = ۲۱۶\pi^۲$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳۸ برای آنکه دو مثلث $AHF$ و $ABH$ متشابه باشند، با توجه به برابری $\hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰$ یکی از دو حالت زیر مدنظر است:




$$\begin{cases} \hat{B}_۲ = \hat{F}, \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \rightarrow \text{دو مثلث بنا به حالت (ز ض ز) هم‌نهشت می‌شوند} \rightarrow \text{غیرقابل قبول} \\ \hat{B}_۲ = \hat{A}_۱, \hat{A}_۲ = \hat{F} : \text{قابل قبول است} \end{cases}$$

پس داریم:

$$\frac{AH}{HF} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow AH^۲ = BH \times HF$$

$$BH : ABC \text{ ارتفاع نظیر وتر در مثلث} = \frac{۳ \times ۴}{۵} = \frac{۱۲}{۵}$$

$$AH : ABH \text{ فیثاغورس در مثلث} : \sqrt{(AB)^۲ - (BH)^۲} = \sqrt{۴^۲ - (\frac{۱۲}{۵})^۲} = \frac{۱۶}{۵}$$

پس داریم:

$$(\frac{۱۶}{۵})^۲ = \frac{۱۲}{۵} \times HF \Rightarrow HF = \frac{\frac{۲۵۶}{۲۵}}{\frac{۱۲}{۵}} = \frac{۶۴}{۱۵}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

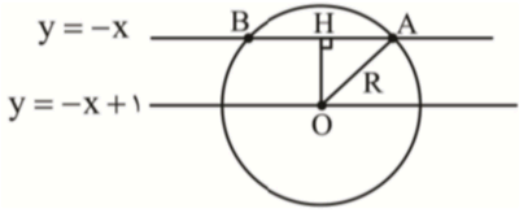
**۳۳۹** دو خط موازی $y+x+۲=۰, y+x-۴=۰$ بر دایره مماس شده‌اند، پس:

اولاً فاصله بین این دو خط برابر قطر دایره است:

$$\text{فاصله دو خط موازی} = \frac{|-۴-۲|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{۶}{\sqrt{۲}} = ۲R \to R = \frac{۳}{\sqrt{۲}}$$

ثانیاً مرکز دایره روی خط $y+x+\frac{-۴+۲}{۲}=۰$ است که با این خطوط، موازی و در وسط آن‌ها قرار دارد.

حالا می‌خواهیم طول وتری که خط $y=-x$ بر روی دایره ایجاد می‌کند را به‌دست آوریم. به‌شکل زیر دقت کنید:




$$\text{فاصلهٔ دوخط موازی : } OH \ (y+x-۱=۰, y+x=۰) = \frac{|-۱-۰|}{\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

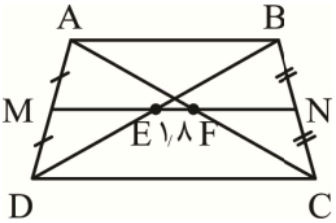
$$AOH: R^۲ = OH^۲ + AH^۲ \to AH = \sqrt{R^۲ - OH^۲} = \sqrt{(\frac{۳}{\sqrt{۲}})^۲ - (\frac{۱}{\sqrt{۲}})^۲} = ۲$$

$$\Rightarrow AB = ۲AH = ۴$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۳۴۰** **گزینه ۲ درست است.**

می‌دانیم در یک ذوزنقه، اگر قطرها و پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق را به‌هم وصل می‌کند، رسم شوند، از قضیهٔ تالس داریم:




$$\begin{cases} MN = \frac{CD+AB}{۲} \\ EF = \frac{CD-AB}{۲} \end{cases}$$

پس در اینجا داریم:

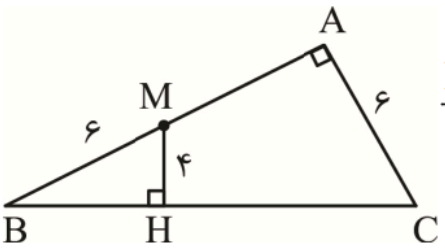
$$\frac{CD-AB}{۲} = ۱/۸ \Rightarrow CD-AB = ۳/۶ \xrightarrow{CD=۴AB} ۴AB-AB = ۳/۶ \Rightarrow AB = ۱/۲ \Rightarrow CD = ۴/۸$$

نهایتاً داریم:

$$S = \frac{(CD+AB)\times \text{ارتفاع}}{۲} = \frac{(۴/۸+۱/۲)\times ۶}{۲} = ۱۸$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۳۴۱ گزینه ۲ درست است.**




دو مثلث ABC و MBH به حالت دو زاویهٔ برابر، متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{MH}{AC}=\frac{BM}{BC}\Rightarrow\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{BC}\Rightarrow BC=۹$$

می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر برابر با نصف وتر یعنی ۴/۵ است.

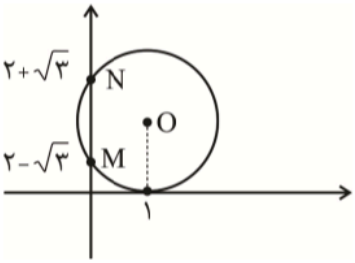
(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۳۴۲ گزینه ۲ درست است.**

ابتدا نقاط تلاقی دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲+۲x-۴y+۱=۰$ با محور yها را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۲+y^۲+۲x-۴y+۱=۰\xrightarrow{x=۰}y^۲-۴y+۱=۰\Rightarrow y=\frac{۴\pm\sqrt{۱۲}}{۲}=۲\pm\sqrt{۳}$$

پس شعاع دایره‌ای را می‌خواهیم که از نقاط $M(۰,۲+\sqrt{۳})$ و $N(۰,۲-\sqrt{۳})$ گذشته و بر محور xها در نقطهٔ $x=۱$ مماس باشد:




مختصات مرکز دایره را برابر با $O(۱,\beta)$ در نظر گرفته و فاصلهٔ آن تا نقاط M و N را که هر دو برابر با شعاع دایره است، با هم مساوی قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{۱^۲+\left(\beta-(۲+\sqrt{۳})\right)^۲}=\sqrt{۱^۲+\left(\beta-(۲-\sqrt{۳})\right)^۲}\Rightarrow\left(\beta-(۲+\sqrt{۳})\right)^۲=\left(\beta-(۲-\sqrt{۳})\right)^۲$$

$$\Rightarrow|\beta-(۲+\sqrt{۳})|=|\beta-(۲-\sqrt{۳})|$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\beta-(۲+\sqrt{۳})=\beta-(۲-\sqrt{۳})\ \text{غ ق ق}\\ \beta-(۲+\sqrt{۳})=-\beta+(۲-\sqrt{۳})\end{cases}\Rightarrow ۲\beta=۴\Rightarrow\beta=۲$$

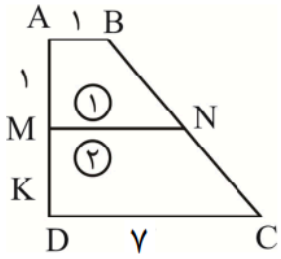
نهایتاً برای محاسبهٔ شعاع دایره، کافی است فاصلهٔ مرکز دایره $O(۱,۲)$ را از یکی از نقاط M و N به‌دست آوریم:

$$O(۱,۲)\qquad M(۰,۲+\sqrt{۳})$$

$$R=\sqrt{۱^۲+(\sqrt{۳})^۲}=۲$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۳۴۳ گزینه ۱ درست است.**




می‌دانیم طول MN برابر است با: $MN=\frac{AM.CD+DM.AB}{AM+MD}=\frac{۷+k}{۱+k}$

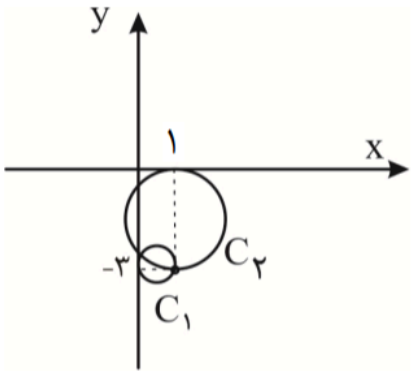
همچنین نسبت ارتفاع‌های دو ذوزنقه هم $\frac{۱}{k}$ است، پس:

$$\frac{S_{(۱)}}{S_{(۲)}}=\frac{۱+\frac{۷+k}{۱+k}}{۷+\frac{۷+k}{۱+k}}\times\frac{۱}{k}=\frac{۸+۲k}{۱۴+۸k}\times\frac{۱}{k}=۱\Rightarrow ۸k^{۲}+۱۴k=۲k+۸\Rightarrow ۲k^{۲}+۳k-۲=۰\xrightarrow{k>۰}k=\frac{۱}{۲}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

**۳۴۴ گزینه ۲ درست است.**

با توجه به شکل داریم:




$$C_{۱}:O_{۱}(\frac{۱}{۲},-۳),r_{۱}=\frac{۱}{۲}$$

$$C_{۲}:O_{۲}(۱,\frac{-۳}{۲}),r_{۲}=\frac{۳}{۲}$$

$$\text{بیشترین فاصله}=O_{۱}O_{۲}+r_{۱}+r_{۲}=\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{۹}{۴}}+\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}+۲$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)